

Válogatott feladatok az elemi matematikából

Megoldások

Összeállította: dr. Tóber Ernő, Nagykanizsa, 1980.

Logikai és kombinatorikai feladatok

1. Egy személyvonat déli 12 órakor indul A-ból B-be 60 km/h állandó sebességgel. Eközben ugyanezen a pályán B-ből A felé halad egy tehervonat 40 km/h sebességgel. Mindkét vonat egyszerre ér célba, és ekkor háromszor olyan távol vannak egymástól, mint egy órával találkozásuk előtt. Mikor indul el a tehervonat B-ből?

Megoldás:

Egy órával a találkozás előtt $60 + 40 = 100$ km-re vannak egymástól. Célba éréskor közöttük lévő távolság $3 \cdot 100 = 300$ km. Az A-ból induló $300 : 80 = 5$ óra alatt tette meg az utat, és így 17 órakor értek célba. A 300 km-t a tehervonat $300 : 40 = 7,5$ óra alatt tette meg; így 2,5 órával korábban indult, mint a személyvonat, azaz 9 óra 30 perckor.

2. Egy 180 cm magas, vízszintes alapú henger alakú-re benzintartály alul csappal, felül pedig töltőnyílással van ellátva. Ez utóbbin át 1 óra alatt tölthető meg az üres tartály. Ha a töltőnyílást és a csapot egyszerre tartjuk nyitva 5 percen át, akkor a tartályban 10 cm-t emelkedik a benzín szintje. Mennyi idő alatt lehet a színültig tele tartályt a csapon át kiüríteni?
3. Egy iskolai rendezvényen körülbelül 80 tanuló vett részt. A résztvevők egyharmada leány. A leányok fele 12. osztályos, a fiúk ötheted része viszont nem 12. osztályos. Hány 12. osztályos tanuló volt a versenyen?
4. Egy telephelyen tyúkokat, libákat és házi nyulakat nevelnek. A libák és nyulak számának aránya 5:9; a nyulak és tyúkok számának aránya 3:2. Az állatoknak 152-vel több lába van, mint feje. Hány tyúkot, libát és nyulat nevelnek a telephelyen?

5. Egy katona elindult a városból és naponta 12 km-t haladt. Egy másik katona is elindult ugyanakkor, de ő az első napon 1 km-t, a másodikon 2 km-t, a harmadikon 3 km-t, a negyediken 4 km-t, az ötödiken 5 km-t és így tovább, minden nap 1 km-rel többet tett meg, amíg csak utol nem érte az első katonát. Hány nap múlva érte utol a második az elsőt?
6. Amikor a 2000 méteres futóverseny győztese átszakítja a célszalagot, Marika 200 méterrel, Erzsi 290 méterrel van mögötte. Tegyük fel, hogy mindkét leány eddigi átlagsebességének megfelelő egyenletes sebességgel fut tovább. Amikor Marika célba ér, hány méterrel lesz mögötte Erzsi?

Megoldás:

1800 méteren Marika 90 m előnyre tesz szert. Feltéve, hogy 100 méterenként ugyanakkora az előnye, ezért 100 méteren $90 : 18 = 5$ m az előnye, így 200 méteren $2 \cdot 5 = 10$ m előnyre tesz szert. Így Marika célbaérkezéskor Erzsivel szemben $90 + 10 = 100$ m előnnyel rendelkezik; vagyis célbaérkezéskor Erzsi még 100 méterre van a céltól.

7. Hét kiránduló összesen 100 gombát szedett az erdőben. Nem volt közöttük két olyan, akik ugyanannyit gyűjtöttek. Bizonyítsuk be, hogy van három olyan kiránduló, akik legalább 50 gombát gyűjtöttek összesen.

Megoldás:

Képzeljük el, hogy a kirándulókat sorba állítjuk az általuk begyűjtött gombák számának csökkenő sorrendjében. Világos, hogy az első három helyen állók összesen többet gyűjtöttek, mint bármely másik három. Bebizonyítjuk, hogy az első három legalább 50 gombát gyűjtött összesen. Ha a harmadik helyen álló legalább 16 gombát gyűjtött, akkor a második helyen álló legalább 17-et és az első helyen álló legalább 18-at és így összesen 51 gombát gyűjtöttek legalább. Ha viszont a harmadik helyen álló csak legfeljebb 15-öt gyűjtött volna, akkor a 4-ik legfeljebb 14-et, az ötödik legfeljebb 13-at, a hatodik legfeljebb 12-t és végül a hetedik legfeljebb 11-et gyűjtött volna, ami összesen $14 + 13 + 12 + 11 = 50$; és így az első háromra is 50 marad. Így beláttuk, hogy az első három mindig gyűjt legalább 50 gombát és ezt

kellett megmutatni.

8. Az 1 és 10000 között az 1-est számjegyként tartalmazó, avagy nem tartalmazó szám van több?
9. Egytől 100-ig a természetes számokból minden lehetséges módon párokat képezünk, ügyelve arra, hogy a párba sorolt két szám különböző legyen. Az egy párba sorolt számokat szorozzuk össze. Hány olyan szorzat lesz, amely 3-mal osztható?

Megoldás:

Mivel a természetes számsorban minden harmadik osztható 3-mal, ezért 1–100 között 33 db 3-mal osztható és 67 db 3-mal nem osztható. Kedvező pártkapunk, ha az egyik osztható 3-mal, a másik nem, illetve ha mindkettő osztható 3-mal.

Ha csak az egyik osztható, akkor ilyen pár $33 \cdot 67 = 2211$ db van.

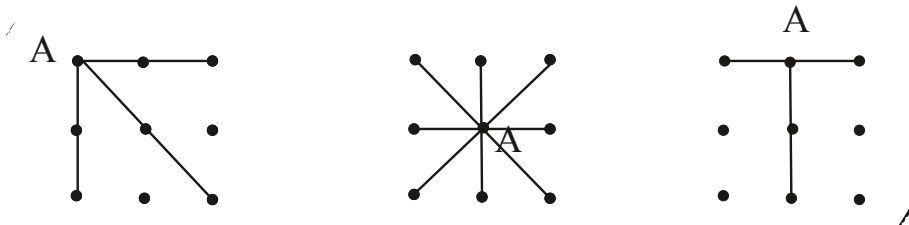
Ha mindkettő osztható 3-mal, akkor mindkettő a 33 közül való, így ebből $\frac{33 \cdot 32}{2} = 528$ lehetőség adódik.

Összesen: $2211 + 528 = 2739$ lehetőség adódik.

10. Tekintsünk a síkon 9 pontból álló négyzetrácsot. Kiválasztunk egy pontot a kilenc közül. Hányféle módon választhatunk további kettőt a maradék közül, hogy a 3 pont egy háromszöget határozzon meg?

Megoldás:

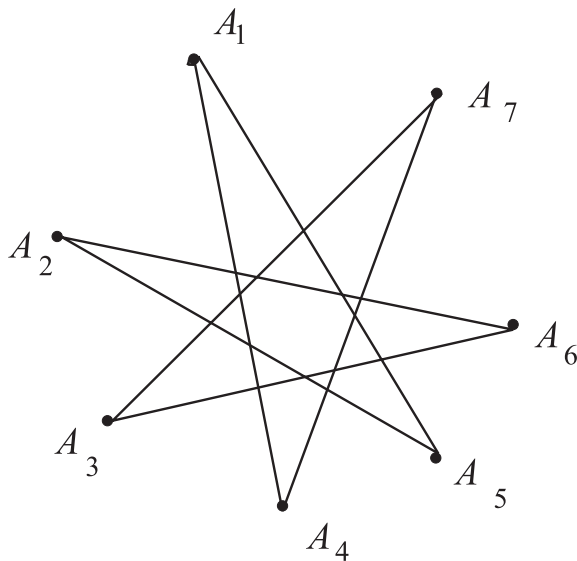
Ki kell zárni azokat az eseteket, amikor a 3 pont egy egyenesbe esik. Legyen a kiszemelt pont A. Az alábbi három alaphelyzet lehet:



11. Tekintsünk a síkon 7 pontot. Ezeket 7 szakasszal összekötjük oly módon, hogy zárt törött vonalat kapjunk. Mennyi lehet a töröttvonal önmagával képzett metszéspontjainak maximális száma?

Megoldás:

Két pontot összekötő szakasz nem metszi önmagát és a végpontjából indulókat. Így a szakaszok mindegyikének maximálisan 4 szakasszal lehet metszéspontja. A metszéspontok maximális száma $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$. Megmutatható, hogy ez viszont meg is valósul az alábbi ábra szerint:



Valamilyen körüljárást tartva mindig a következő harmadikkal kötjük össze. Így módon AZ $A_1A_4A_7A_3A_6A_2A_5A_1$ zárt töröttvonalhoz jutunk, amely 7 db. egymáshoz csatlakozó szakaszból áll és mindegyiken 4 metszéspont sorakozik.

Algebrai – és trigonometriai átalakítások alkalmazásai

12. Legyen $x + y + z = 1$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2$ kifejezés értékét.

Megoldás:

Az $x + y + z = 1$ feltételi egyenletet emeljük négyzetere:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + zx = 1$$

Mivel $xyz \neq 0$, lehet, ezért az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ feltételből

$xy + yz + zx = 0$ adódik, amit felhasználva:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

adódik és ezt kellett meghatározni.

13. Legyen n tetszőleges egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$$

kifejezés teljes négyzet.

Megoldás:

Tekintsük az alábbi módon történő beszorzást:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= (n^2 + 3n + 1)(n^2 + 3n) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2, \end{aligned}$$

amit igazolni kellett.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha $x + y + z + t = 0$, akkor

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 3(xy - zt)(z + t).$$

Megoldás:

Az $x + y + z + t = 0$ feltételből $x + y = -(z + t)$.

Mindkét oldalt köbre emelve; utána végezzük a következő átalakítá-

sokat:

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= -z^3 - 3z^2t - 3zt^2 - t^3 \\x^3 + y^3 + z^3 + t^3 &= -3zt(z+t) - 3xy(x+y) = \\3xy(z+t) - 3zt(z+t) &= 3(z+t)(xy-zt)\end{aligned}$$

és ezt kellett igazolni.

15. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y, z, t egész számokra $x + y = z + t$, akkor

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

három egész szám négyzetének összege.

Megoldás:

Az $x + y = z + t$ feltételből $x + y - z - t = 0$, ezért:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(x + y - z - t) = \\&= x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + x^2 - 2xt + t^2 = \\&= (x + y)^2 + (x - z)^2 + (x - t)^2,\end{aligned}$$

és ezt kellett igazolni.

16. Legyen $x + y + z = 0$ és $x^2 + y^2 + z^2 = a$. Számítsa ki az

$$x^4 + y^4 + z^4$$

kifejezés értékét.

Megoldás:

A feltételi egyenletet négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0.$$

Az $x^2 + y^2 + z^2 = a$ feltételt felhasználva adódik, hogy

$$xy + yz + zx = -\frac{1}{2}a.$$

Mivel $x^2 + y^2 + z^2 = a$, ezért $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2$.

Elvégezve a műveleteket:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = a^2$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = a^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Másrészt $(xy + yz + zx)^2 = \frac{1}{4}a^2$, így

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(y + x + z) = \frac{1}{4}a^2.$$

Mivel $x + y + z = 0$, ezért

$$x^4 + y^4 + z^4 = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}a^2, \text{ vagyis}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = \frac{1}{2}a^2.$$

17. Számítsuk ki a következő kifejezés számértékét:

$$\frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b},$$

ha $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ és $9a^2 - b^2 \neq 0$.

Megoldás:

A kiszámítandó kifejezést egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} \frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b} &= \frac{(2a - b)(3a + b) + (3a - b)(5b - a)}{(3a - b)(3a + b)} = \\ &= \frac{15ab + 3a^2 - 6b^2}{9a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

A $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ feltételi egyenletből

$$5ab = 3b^2 - 10a^2,$$

$15ab = 9b^2 - 30a^2$, amit beírva a korábban kapott kifejezésbe:

$$\frac{9b^2 - 30a^2 + 3a^2 - 6b^2}{9a^2 - 6b^2} = \frac{3b^2 - 27a^2}{9a^2 - 6b^2} = -3.$$

18. Számítsa ki az

$$\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$$

kifejezés értékét, ha

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} = a.$$

Megoldás:

Vizsgáljuk a kiszámítandó kifejezés reciprokát!

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1.$$

A feltételből:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x + 1}{x} &= \frac{1}{a}, \text{ ahonnan} \\ x + \frac{1}{x} &= \frac{1}{a} - 1. \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 - 1}, \text{ ezért}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 - 1} = \frac{a^2}{1 - 2a}.$$

19. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

akkor

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

Megoldás:

Szorozzuk meg a feltételi egyenlőséget $(a+b+c)$ -vel:

$$\begin{aligned} \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(a+b+c)}{a+c} + \frac{c(a+b+c)}{a+b} &= (a+b+c) \\ \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{a+c} + b + \frac{c^2}{a+b} + c &= a+b+c, \text{ ahonnan} \\ \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} &= 0 \quad \text{és ezt kellett igazolni.} \end{aligned}$$

20. Hozzuk minél egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sin^2 2\alpha$$

Megoldás:

Az összegzési formulák és nevezetes szögek szögfüggvényeit felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sin^2 2\alpha = \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos 2\alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin 2\alpha\right) \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2\alpha\right) + \\ &+ \sin^2 2\alpha = \left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha\right) \left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha\right) + \\ &+ \sin^2 2\alpha = \frac{1}{4} \cos^2 2\alpha - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \\ &= \frac{1}{4} (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

21. Számítsa ki a

$$\sin^6 x + \cos^6 x$$

értékét, ha $\sin 2x = 0,2$.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \cdot 4 \sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot 0,04 = 1 - 0,03 = 0,97.\end{aligned}$$

22. Hozzuk minél egyszerűbb alakra következő kifejezést:

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}$$

.

Megoldás:

Az előző (21.) feladatban láttuk, hogy:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x,$$

ezért csak a számlálót alakítjuk:

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x - 1 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1 = \\ &= -2 \sin^2 x \cos^2 x.\end{aligned}$$

Felhasználva a kapott eredményeket:

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{-2 \sin^2 x \cos^2 x}{-3 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2}{3}.$$

23. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}.$$

Megoldás:

Mint ismeretes $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, alkalmazva az addíciós tételeket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0} &= \frac{(\cos 15^0 + \sin 15^0)(\cos 15^0 - \sin 15^0)}{(\cos 15^0 - \sin 15^0)^2} = \\
&= \frac{\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0}{\cos^2 15^0 + \sin^2 15^0 - 2 \sin 15^0 \cos 15^0} = \frac{\cos(2 \cdot 15^0)}{1 - \sin(2 \cdot 15^0)} = \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

24. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög szögeire

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sin \beta + \cos \beta,$$

akkor a háromszög egyenlő szárú, vagy derékszögű.

Megoldás:

A feltételi egyenletből $\sin \alpha - \sin \beta = \cos \beta - \cos \alpha$, majd az ismert szorzattá alakítási formulákat alkalmazva a következőket kapjuk:

$$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0,$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 0,$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0, \text{ vagy } \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = 0.$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = k\pi, \text{ azaz } \alpha - \beta = 2k\pi.$$

Mivel háromszögről van szó, ezért csak $k = 0$ lehet, így ekkor $\alpha = \beta$, azaz a háromszög egyenlő szárú. A másik esetben azt kapjuk, hogy:

$tg \frac{\alpha + \beta}{2} = 1$, ahonnan $\frac{\alpha + \beta}{2} = 45^0$, azaz $\alpha + \beta = 90^0$.

Persze, ha egy háromszögben $\alpha + \beta = 90^0$, akkor a háromszög harmadik szöge 90^0 -os.

25. Egy háromszög α , β , γ szögeire $2\beta = \alpha + \gamma$ és $\cos^2 \beta = \sin \alpha \sin \gamma$. Határozzuk meg a háromszög szögeit.

Megoldás:

A háromszög szögeire $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, a feltétel szerint $2\beta = \alpha + \gamma$ és így $3\beta = 180^0$, ahonnan $\beta = 60^0$.

$\cos^2 \beta = \sin \alpha \sin \gamma$ alapján és $\alpha = 60^0 - \delta$, $\gamma = 60^0 + \delta$ jelöléssel élve

$$\frac{1}{4} = \sin(60^0 - \delta) \sin(60^0 + \delta),$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \delta - \frac{1}{2} \sin \delta \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \delta + \frac{1}{2} \sin \delta \right),$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cos^2 \delta - \frac{1}{4} \sin^2 \delta,$$

$$1 = 3 \cos^2 \delta - (1 - \cos^2 \delta),$$

$$\cos^2 \delta = \frac{1}{2}.$$

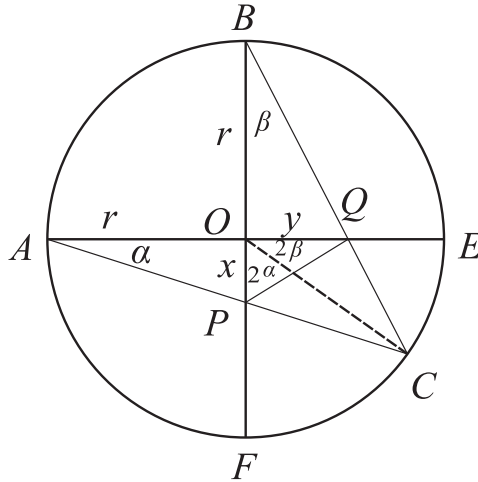
Mivel háromszögről van szó ezért csak $\delta = 45^0$ lehet.

A háromszög szögei: 15^0 , 60^0 és 105^0 .

26. Az r sugarú kör egymásra merőleges átmérői AE és BF . Legyen C az EF körív belső pontja. BC az AE -t Q -ban, az AC a BF -et P -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $APQB$ négyszög területe r^2 .

Megoldás:

Jelöléseket az ábra mutatja. Legyen $OP = x$, $OQ = y$.



A kerületi és középponti szögek tételét felhasználva

$$2\alpha + 2\beta = 90^\circ, \text{ melyből } \beta = 45^\circ - \alpha.$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha},$$

$$x = r \cdot \operatorname{tg}\alpha; \quad y = r \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Az $ABPQ$ négyszög átlói egymásra merőlegesek, ezért területe az átlók szorzatának fele, vagyis

$$T_{ABPQ} = \frac{AQ \cdot BP}{2} = \frac{(r + y)(r + x)}{2}$$

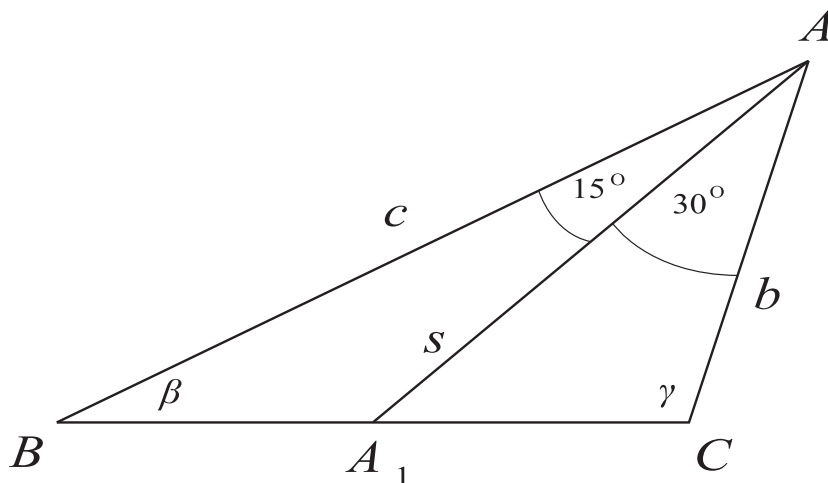
$$r + x = r(1 + \operatorname{tg}\alpha); \quad r + y = r \left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} \right) = \frac{2r}{1 + \operatorname{tg}\alpha}.$$

A kapott összefüggéseket felhasználva:

$$T_{ABQP} = \frac{r(1 + \operatorname{tg}\alpha)}{2} \cdot \frac{2r}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = r^2, \quad \text{és ezt kellett igazolni.}$$

27. Az ABC háromszög A -ból induló súlyvonala az A -nál lévő szöget 15° -os és 30° -os részekre osztja. Mekkorák a háromszög hiányzó szögei?

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit. Ismert, hogy a súlyvonal felezi a háromszög területét, ezt felhasználva kapjuk:

$$\frac{c \cdot s \cdot \sin 15^\circ}{2} = \frac{b \cdot s \cdot \sin 30^\circ}{2}$$

Átrendezés után:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = 2 \cos 15^\circ.$$

Másrészt a szinusztétel alapján:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

Mivel $\beta + \gamma = 135^\circ$, ezért $\gamma = 135^\circ - \beta$.

Az előzőket figyelembe véve a két kifejezést összevetve:

$$\frac{\sin (135^\circ - \beta)}{\sin \beta} = 2 \cos 15^\circ,$$

$$\frac{\sin 135^\circ \cos \beta - \cos 135^\circ \sin \beta}{\sin \beta} = 2 \cos \beta$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{ctg} \beta + 1) = 2 \cos 15^\circ.$$

Könnyen igazolható, hogy $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$.

Ez utóbbit felhasználva $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{3}$, ahonnan $\beta = 30^\circ$ és így már $\gamma = 105^\circ$ következik.

Elemi számelmélet

28. A 16958 és 62280 számokat egy természetes számmal osztva maradékul 32-t, illetve 1-et kapunk. Mi lehetett az osztó?

Megoldás:

Legyen a közös osztó n . A feltétel szerint vannak olyan p és q pozitív egészek, amelyekre:

$$16958 = n \cdot p + 32, \text{ illetve } 62280 = n \cdot q, \text{ ahonnan:}$$

$$n \cdot = 16926 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31$$

$$n \cdot = 62279 = 7^2 \cdot 31 \cdot 41.$$

Ebből a legnagyobb közös osztó: $7 \cdot 31$

Mivel az osztó nagyobb a maradéknál, ezért $n = 7 \cdot 31 = 217$ lehet.

29. Bizonyítsa be, hogy

$$17^5 + 24^4 - 13^{21}$$

kifejezés osztható 10-zel.

Megoldás:

Elég megmutatni, hogy a kifejezés nullára végződik. Ezért a végződéseket fogjuk vizsgálni.

$17^5 = 17 \cdot (17^2)^2$ alakból leolvasható, hogy a hatvány végződése 1 és ha ezt a számot 17-tel szorozzuk, akkor a végződés 7 lesz.

$24^4 = (24^2)^2$ számban a hatvány végződése 6 és ha két 6-ra végződő számot összeszorozunk, a végződés ismét 6 lesz.

Így $17^5 + 24^4$ végződése $7 + 6 = 13$ miatt 3.

$13^{21} = 13 \cdot 13^{20} = 13 \cdot (13^4)^5$ szám esetében a hatvány 1-re végződik, és ha 13-mal szorozzuk, akkor 3 lesz a végződés. Így keresett kifejezés végződése $3 - 3 = 0$ miatt 0.

30. Határozzuk meg a következő kifejezés utolsó számjegyét:

$$19^{87} - 87^{19}$$

Megoldás:

Elég a hatványok végződését vizsgálni, amit az utolsó jegy hatványának végződése ad.

A 9 hatványainak végződése: 9; 1; 9; 1; ...

A páratlan kitevőjűek 9-re végződnek, ezért 19^{87} végződése: 9.

A 7 hatványainak a végződése: 7; 9; 3; 1; 7; 9; 3; 1; ...

Négyes csoportok ismétlődnek. Mivel $19 = 4 \cdot 4 + 3$, ezért 87^{19} végződése: 3.

Így már adódik, hogy

$$19^{87} - 87^{19} \text{ végződése: } 9 - 3 = 6.$$

31. Milyen maradékot kapunk, ha 66^{17} -ent elosztjuk 7-tel?

Megoldás:

Alakítsuk át egy kicsit a bizonyítandó kifejezést:

$$66^{17} = (66^{17} - 3^{17}) + 3^{17}.$$

Ismert, hogy $(66^{17} - 3^{17})$ osztható az alapok különbségével, azaz $66 - 3 = 63$ -mal, ami viszont osztható 7-tel. Ezért elég csak 3^{17} maradékát vizsgálni.

3 hatványainak 7-es maradékai 6-os periódussal ismétlődnek:

$$3; 2; 6; 4; 5; 1; 3; 2; 6; 4; 5; 1; \dots$$

Mivel $17 = 2 \cdot 6 + 5$, ezért a maradéka - és így az egész kifejezés 7-es maradéka - 5.

32. Bizonyítsuk be, hogy

$$2^{16} + 3^{40} + 5^{39} + 2 \cdot 4^7$$

kifejezés osztható 10-zel.

Megoldás:

Mivel $10 = 2 \cdot 5$ és $(2; 5) = 1$, ezért elég megmutatni, hogy a kifejezés osztható 2 - vel és 5 - tel. Mivel két páratlan szám összege páros, így a 2 - vel való oszthatóság nyilvánvaló.

Az 5 - tel való oszthatóság szempontjából csak $2^{16} + 3^{40} + 2 \cdot 4^7$ érdekes.

Kifejezésünket átalakítjuk a következő módon:

$$2^{16} + 3^{40} + 2 \cdot 4^7 = 2^{16} + 3^{40} + 2^{15} = 3 \cdot 2^{15} + 3^{40} = 3(2^{15} + 3^{39})$$

2 hatványainak az 5 - ös maradékai: 2; 4; 3; 1; 2; 4; 3; 1 ...

Figyelembe véve a 4 - es periodust 2^{15} 5 - ös maradéka: 3, ugyanis $15 = 3 \cdot 4 + 3$.

3 hatványainak az 5 - ös maradékai: 3; 4; 2; 1; 3; 4; 2; 1 ...

Mivel ez is 4 – es periodust mutat $3^{39} \equiv 5 \pmod{5}$ – ös maradéka: 2, mert itt $39 = 9 \cdot 4 + 3$.

Tekintettel arra, hogy összeadásnál a maradékok összeadódnak, ezért a zárójelben lévő kifejezés osztható 5 – tel.

33. Bizonyítsuk be, hogy

$$2^{17} + 2^5 - 1$$

összetett szám.

Megoldás:

Tekintsük a következő átalakításokat:

$$2^{17} + 2^5 - 1 = 2^{17} + 1 + 2^5 - 2 = 2^{17} + 1^{17} + 30$$

Ismert, hogy $2^{17} + 1^{17}$ osztható az alapok összegével, azaz 3 – mal, 30 is osztható 3 – mal, így a kifejezésnek van valódi osztója, tehát összetett szám.

34. Bizonyítsuk be, hogy $3^{60} - 2^{60}$ osztható 11 – gyel.

Megoldás:

Itt is leggyorsabb a hatványok 11 – es maradékainak a vizsgálata!

3 hatványi esetben: 3; 9; 5; 41; 3; ...

Figyelembe véve, hogy négy a periodus, $2^{60} \equiv 1 \pmod{11}$ – es maradéka 1.

2 hatványainál: 2; 4; 8; 5; 11; 9; 7; 3; 6; 1; 2; 4 ... , itt 10 a periodus. emiatt $2^{60} \equiv 1 \pmod{11}$ – es maradéka szintén 1. Ezért a két hatvány különbsége osztható 11 – gyel.

Megjegyzés: A feladat úgy is megoldható, hogy a hatványozás azonosságaival szorzattá írjuk a kifejezést:

$$(3^{15})^4 - (2^{15})^4 = \left[(3^{15})^2 + (2^{15})^2 \right] \cdot \left[(3^{15})^2 - (2^{15})^2 \right] = (9^{15} + 4^{15}) \cdot$$

$\left[(9^5)^3 - (4^5)^3 \right] =$. Ismer, hogy két köbszám különbsége osztható az alapok különbségével, ezért itt elegendő csak a $9^5 - 4^5$ kifejezést vizsgálni.

$$\begin{aligned} 9^5 - 4^5 &= (3^5)^2 - (2^5)^2 = (3^5 + 2^5)(3^5 - 2^5) = (243 + 32)(243 - 32) = \\ &= 11 \cdot 25 \cdot 211. \end{aligned}$$

35. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor az

$$A = 2 + 3^n + 2^{n+1} + 6^n$$

összetett szám.

Megoldás:

$$\begin{aligned} A &= 2 + 3^n + 2^{n+1} + 6^n = 2 + 2 \cdot 2^n + 3^n + 2^n \cdot 3^n = \\ &= 2(1 + 2^n) + 3^n(1 + 2^n) = (1 + 2^n)(2 + 3^n). \end{aligned}$$

Mindkét tényező 1-nél nagyobb természetes szám, ezért az A két valódi osztójának a szorzata; vagyis összetett szám.

36. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor

$$25n^4 + 9n^2 + 1$$

mindig összetett szám.

Megoldás:

$$\begin{aligned} 25n^4 + 9n^2 + 1 &= 25n^4 + 10n^2 + 1 - n^2 = (5n + 1)^2 - n^2 = \\ &= (5n^2 + n + 1)(5n^2 + 1 - n) \end{aligned}$$

A feltétel miatt mindegyik tényező egynél nagyobb egész, vagyis valódi osztók. Így a kifejezés valóban összetett szám.

37. Határozzuk meg azokat a $3n + 1$ alakú természetes számokat, amelyek oszthatók 5-tel.

Megoldás:

$$3n + 1 = 3n - 9 + 10 = 3(n - 3) + 10.$$

Mivel 10 osztható 5-tel, ezért $3n + 1$ is osztható lesz, ha $n - 3 = 5k$ alakú.

Így $3n + 1 = 3 \cdot 5k + 10 = 15k + 10$ alakúak lesznek 5-tel oszthatók.

38. Bizonyítsuk be, hogy ha p 3-nál nagyobb prímszám, akkor tetszőleges n természetes számra

$$A = p^2 + 3n + 2$$

összetett szám.

Megoldás:

Ha $p > 3$ és prím, akkor $3k + 1$ vagy $3k - 1$ alakú. Ebből következik, hogy p^2 hármas maradéka 1 azaz $p^2 = 3a + 1$ alakba írható.

$$A = p^2 + 3n + 2 = 3a + 1 + 3n + 2 = 3(a + n + 1),$$

ahonnan következik, hogy $A > 1$ és osztható 3-mal, ezért összetett szám.

39. Bizonyítsuk be, hogy ha x 3-mal nem osztható természetes szám, akkor

$$A = 1 + 2^x + 4^x$$

osztható 7-tel.

Megoldás:

Ha x 3-mal nem osztható, akkor $3k + 1$ vagy $3k + 2$ alakú.

Ha $x = 3k + 1$ alakú, akkor

$$2^x = 2^{3k+1} = 2 \cdot 8^k = 2(7 + 1)^k = 2(7a + 1) = 2 \cdot 7a + 2,$$

azaz a kifejezés 7-es maradéka 2.

$$4^x = 4^{3k+1} = 4 \cdot 64^k = 4 \cdot (63 + 1)^k = 4(63b + 1) = 4 \cdot 7 \cdot 9b + 4,$$

azaz a kifejezés 7-es maradéka 4.

A leírtakat figyelembe véve A maradéka 7-tel osztva: $1 + 2 + 4 = 7$, ami azt jelenti, hogy osztható 7-tel.

Ha $x = 3k + 2$ alakú, akkor

$$2^x = 2^{3k+2} = 4 \cdot 8^k = 4(7 + 1)^k = 4(7c + 1) = 4 \cdot 7 + 4,$$

azaz a kifejezés 7-tel osztva 4 maradékot ad.

$$4^x = 4^{3k+2} = 16 \cdot 64^k = 16(63 + 1)^k = 16(63d + 1) = 16 \cdot 63d + 16,$$

azaz ennek a kifejezésnek a 7-es maradéka 2.

Ebben az esetben is A osztható 7-tel, mert a maradékok összege most is $1 + 4 + 2 = 7$.

Megjegyzés: A feladatot úgy is megoldhatjuk, ha egyből a kifejezés 7-es maradékát vizsgáljuk!

2^x maradéka sorra: 2; 4; 1; 2; 4; 1; ...

4^x maradéka : 4; 2; 1; 4; 2; 1; ...

Észrevehetjük, hogy az 1-es maradék mindkét esetben akkor lép fel, amikor x 3 többszöröse, egyébként az egyik maradéka 2, a másiké 4 és fordítva. Tehát A osztási maradéka $1 + 2 + 4$ minden esetben, azaz osztható 7-tel. Az is látható, hogy ha x 3 többszöröse, akkor nem osztható 7-tel, mert ekkor a maradék $1 + 1 + 1 = 3$.

40. Bizonyítsuk be, hogy ha n 3-mal nem osztható természetes szám, akkor

$$A = 1 + n^2 + 3^n + n^4$$

osztható 6-tal.

Megoldás:

Könnyen látható, hogy bármely n természetes számra A páros és így 2-vel osztható. Elég megmutatni, hogy A osztható 3-mal is.

A 3-mal való oszthatóság szempontjából már csak a 3^n -től külön-

böző tagokat kell vizsgálni.

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1).$$

A feltevés miatt $n = 3k + 1$ vagy $n = 3k - 1$ alakú.

Ha $n = 3k + 1$ alakú, akkor $n^2 + n + 1$ osztható 3 - mal, ezért A is osztható 3 - mal.

Ha $n = 3k - 1$ alakú, akkor $n^2 - n + 1$ osztható 3 - mal, azaz A is osztható 3 - mal.

Mivel A osztható 2 - vel is és 3 - mal is és $(2; 3) = 1$, ezért A osztható 6 - tal.

41. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$n^5 - 5n^3 - 6n$$

osztható 10 - zel.

Megoldás:

Tekintsük a következő átalakításokat:

$$n^5 - 5n^3 - 6n = n^5 - 5n^3 + 4n - 10n$$

Elég megmutatni, hogy $n^5 - 5n^3 + 4n$ osztható 10 - zel.

$$\begin{aligned} n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = \\ &= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2). \end{aligned}$$

Öt egymást követő egész között biztosan van 2 - vel és 5 - tel osztható.

Mivel $(2; 5) = 1$, ezért a szorzat osztható $2 \cdot 5 = 10$ - zel.

42. Legyenek a és b egész számok. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A = 5a + 3b \text{ és } B = 13a + 8b$$

számok legnagyobb közös osztója megegyezik a és b legnagyobb közös osztójával.

Megoldás:

Legyen A és B legnagyobb közös osztója d ; $d = (A; B)$.

Mivel $(5; 13) = 1$, illetve $(3; 8) = 1$, ezért $d \mid (5B - 13A)$, illetve $d \mid (8A - 3B)$ is igaz.

$$5B - 13A = 65a + 40b - 65a - 39b = b; \text{ vagyis } d \mid b.$$

$$8A - 3B = 40a + 24b - 39a - 24b = a; \text{ vagyis } d \mid a.$$

Ebből világos, hogy d közös osztója a - nak és b - nek.

Azonban d - nél nagyobb közös osztójuk nincs is, mert ha volna, akkor A - nak és B - nek is közös osztója volna és így d nem lenne a legnagyobb.

43. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor a

$$\frac{n^2 + 3n + 3}{n + 1}$$

tört nem egyszerűsíthető.

Megoldás:

Tekintsük a következő átalakítást:

$$\frac{n^2 + 3n + 3}{n + 1} = \frac{(n + 1)(n + 2) + 1}{n + 1} = n + 2 + \frac{1}{n + 1}.$$

Mivel az $\frac{1}{n + 1}$ tört nem egyszerűsíthető, ezért az eredeti szám sem.

44. Bizonyítsuk be, hogy bármely n egész számra

$$n^2 + 3n + 5$$

nem osztható 121-gyel.

Megoldás:

Tegyük fel, hogy van olyan k egész, amelyre

$$n^2 + 3n + 5 = 121k, \text{ azaz}$$

$$n^2 + 3n + 5 - 121k = 0.$$

Ha valamely k -ra lenne egész gyöke az n -ben másodfokú egyenletnek, akkor az egyenlet D diszkriminánsának teljes négyzetnek kell lenni.

$$D = 9 - 4(5 - 121k) = 4 \cdot 121k - 11 = 11(44k - 1).$$

Mivel $44k - 1$ már 11-gyel nem osztható, ezért D nem lehet teljes négyzet. A felírt egyenlőség nem állhat fenn, azaz a kifejezés nem lehet 121-el osztható.

45. Bizonyítsuk be, hogy

$$\underbrace{221 \dots 22}_{n \text{ db}} + \underbrace{33 \dots 3}_{n \text{ db}}^2 = \underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ db}}$$

Megoldás:

$$\underbrace{222 \dots 22}_{n \text{ db.}} = 2 \cdot \underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ db}} = \frac{2}{9} \cdot \underbrace{999 \dots 99}_{n \text{ db}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{10^n - 1}{9}.$$

Hasonló módon: $\underbrace{333 \dots 33}_{n \text{ db}} = \frac{10^n - 1}{3}.$

$$\underbrace{221 \dots 22}_{n \text{ db}} + \underbrace{33 \dots 3}_{n \text{ db}}^2 = \frac{2 \cdot 10^n - 2 + 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}{9} =$$

$$= \frac{10^{2n} - 1}{9} = \underbrace{111 \dots 11}_{2n \text{ db}}, \text{ és ezt kellett igazolni.}$$

46. A 14641 egy természetes szám negyedik hatványa. Bizonyítsuk be, hogy ha a számjegyek közé mindenhova ugyanannyi nullát beírunk, akkor ismét olyan számot kapunk, amely egy természetes szám negyedik hatványa.

Megoldás:

Tegyük fel, hogy n darab nullát írunk 2 – 2 számjegy közé, így a következő A számhoz jutunk:

$$A = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ db}} 4 \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ db}} 6 \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ db}} 4 \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ db}} 1$$

$$A = 10^{4n+4} + 4 \cdot 10^{3n+3} + 6 \cdot 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 1 =$$

$$= (10^{n+1})^4 + 4 \cdot (10^{n+1})^3 + 6 \cdot (10^{n+1})^2 + 4 \cdot 10^{n+1} + 1 =$$

$$= (10n + 1 + 1)^4, \quad \text{amit igazolni kellett.}$$

47. Bizonyítandó, hogy

$$\underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ db}} \cdot \underbrace{100 \dots 005}_{n+1 \text{ db}} + 1$$

egy természetes szám négyzete.

Megoldás:

Írjuk fel tömörebb formában!

$$\underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ db}} \cdot \underbrace{100 \dots 005}_{n+1 \text{ db}} + 1 = \frac{1}{9} (10^n - 1) (10^n + 5) + 1 =$$

$$= \frac{10^{2n} - 10^n + 5 \cdot 10^n - 5 + 9}{9} = \frac{(10^n)^2 + 4 \cdot 10^n + 4}{9} =$$

$$= \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2.$$

A kapott szám egész, ugyanis $10^n + 2$ olyan, hogy számjegyeinek az összege osztható 3 – mal.

Másodfokúra visszavezethető egyenletek; a gyökökkel kapcsolatos feladatok

48. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) - 5 = 0$$

Megoldás:

Legyen $x - \frac{1}{x} = y$, ekkor $y^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, így egyenletünk:

$$y^2 + 2 + \frac{1}{2}y - 5 = 0,$$

$$2y^2 + y - 6 = 0;$$

$$y_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4};$$

$$y_1 = \frac{3}{2}; \quad y_2 = -2.$$

$$x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \quad \text{illetve} \quad x - \frac{1}{x} = -2;$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0, \quad x^2 + 2x - 1 = 0;$$

$$x_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}; \quad x_{3;4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -1 + \sqrt{2}; \quad x_4 = -1 - \sqrt{2}.$$

49. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{49}{x-50} + \frac{50}{x-49}$$

Megoldás:

Legyen $\frac{x-49}{50} = u$; $\frac{x-50}{49} = v$, ekkor az egyenletünk szerint:

$$u + v = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv};$$

$$(u+v) \left(1 - \frac{1}{uv} \right) = 0, \text{ ahonnan } u+v=0, \quad uv=1,$$

és így $\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = 0$, illetve $\frac{(x-49)(x-50)}{49 \cdot 50} = 1$;

$$\begin{aligned}
49x - 49^2 + 50x - 50^2 &= 0; & x^2 - 99x &= 0 \\
99x &= 4901 & x(x - 99) &= 0; \\
x_1 &= \frac{4901}{99} & x_2 &= 0; & x_3 &= 99.
\end{aligned}$$

50. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$$

Megoldás:

$$\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x-1} = 0.$$

Legyen $\frac{x+2}{x+1} = u$; $\frac{x-2}{x-1} = v$, ekkor egyenletünk:

$$u^2 + v^2 - \frac{5}{2}uv = 0.$$

Feltehető, hogy $v \neq 0$, mert ha $v = 0$ lenne, akkor $u = 0$ következne, ami lehetetlen. Ezért eloszthatjuk az egyenletet v^2 -tel:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{u}{v}\right) + 1;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)_{1;2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4};$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)_1 = 2; \quad \left(\frac{u}{v}\right)_2 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x-2} = 2; \quad \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{2};$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0; \quad x^2 + 3x - 2 = 0;$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \quad x_3 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}.$$

Ellenőrizhető, hogy az egyenletnek 4 megoldása van.

51. Legyenek $p; p_1; q; q_1$ olyan valós számok, amelyekre $p \cdot p_1 = 2(q + q_1)$.

Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + px + q = 0 \text{ és } x^2 + p_1x + q_1 = 0$$

egyenletek közül legalább az egyik megoldható a valós számok halmazán.

Megoldás:

Az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet diszkriminánsa: $D = p^2 - 4q$;

Az $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ egyenlet diszkriminánsa: $D_1 = p_1^2 - 4q_1$;

$$D + D_1 = p^2 + p_1^2 - 4(q + q_1).$$

A $p \cdot p_1 = 2(q + q_1)$ feltételt felhasználva:

$$D + D_1 = p^2 + p_1^2 - 2p \cdot p_1 = (p - p_1)^2 \geq 0.$$

A $D + D_1 \geq 0$ relációból következik, hogy vagy $D \geq 0$, vagy $D_1 \geq 0$, vagy mindkettő nemnegatív, ami éppen azt jelenti, hogy legalább az egyik egyenletnek valós gyökei vannak.

52. Az $x^2 + ax + 1 = b$ egyenlet gyökei pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2$ összetett szám.

Megoldás:

Az $x^2 + ax + 1 - b = 0$ egyenlet gyökei legyenek x_1 és x_2 .

A Viète – formulák alapján:

$$a = -(x_1 + x_2); \quad b = 1 - x_1x_2.$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (1 - x_1x_2)^2 = x_1^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^2 + 1 = \\ &= x_1^2(1 + x_2^2) + (x_2^2 + 1) = (1 + x_2^2)(1 + x_1^2). \end{aligned}$$

A feltevés szerint $1 + x_2^2 \geq 2$ és $1 + x_1^2 \geq 2$ és egészek, ezért $a^2 + b^2$ két valódi osztójának a szorzata, vagyis összetett szám.

53. Határozzuk meg az

$$x^2y - x^2 + 2xy - x + 2y = 1$$

egyenlet azon $(x; y)$ megoldását, amelyekre y maximális.

Megoldás:

Rendezzük x szerint az adott egyenletet:

$$(y - 1)x^2 + (2y - 1)x + (2y - 1) = 0.$$

A kapott x - ben másodfokú egyenletnek csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa: $D \geq 0$.

$$D = (2y - 1)^2 - 4(2y - 1)(y - 1) \geq 0;$$

$$(2y - 1)(3 - 2y) \geq 0;$$

$$(2y - 1)(2x - 3) \leq 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$, és így $y_{max} = \frac{3}{2}$.

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0, \quad x^2 + 4x + 4 = 0; \quad (x + 2)^2 = 0; \quad x = -2.$$

54. Határozzuk meg mindazon valós értékeket, amelyekre az alábbi egyenletnek két különböző pozitív gyöke van:

$$x^2 - 2(a - 2)x + a^2 - 2a - 3 = 0.$$

Megoldás:

Két különböző valós gyök akkor van, ha az egyenlet diszkriminánsa: $D > 0$.

$$D = 4(a - 2)^2 - 4(a^2 - 2a - 3) = 4(7 - 2a).$$

$D > 0$, ha $7 - 2a > 0$, ahonnan $a < 3,5$. (1)

Ha az egyenlet gyökeire $x_1 > 0$ és $x_2 > 0$, akkor $x_1 + x_2 > 0$ és $x_1 x_2 > 0$.

A Viète – formulák szerint:

$$x_1 + x_2 = 2(a - 2);$$

$$x_1 x_2 = a^2 - 2a - 3.$$

$$a - 2 > 0 \text{ és } a^2 - 2a - 3 > 0;$$

$$a > 2 \text{ és } (a + 1)(a - 3) > 0;$$

$$a > 2 \text{ és } a < -1 \text{ vagy } a > 3.$$

A két egyenlőtlenség egyszerre igaz, ha $a > 3$. (2)

Az (1) és (2) alapján következik, hogy $3 < a < 3,5$.

55. A p paraméter mely értékeire lesz az

$$x^2 + 2(p + 1)x + 9p - 5 = 0$$

egyenlet mindkét gyöke negatív?

Megoldás:

Az $x^2 + 2(p + 1)x + 9p - 5 = 0$ egyenletnek valós gyöke csak akkor van, ha a diszkriminánsa: $D \geq 0$.

$$D = 4(p + 1)^2 - 4(9p - 5) \geq 0;$$

$$p^2 - 7p + 6 \geq 0, \text{ ahonnan:}$$

$$p \geq 6 \text{ vagy } p \leq 1 \quad (1)$$

A Viète – formulák szerint:

$$x_1 + x_2 = -(p + 1); \quad x_1 x_2 = 9p - 5.$$

Ha $x_1 < 0$ és $x_2 < 0$, akkor $x_1 + x_2 < 0$ és $x_1 x_2 > 0$.

$$-2(p + 1 < 0) \quad \text{és} \quad 9p - 5 > 0;$$

$$p > -1 \text{ és } p > \frac{5}{9}, \text{ ahonnan } p > \frac{5}{9}. \quad (2)$$

(1) és (2) alapján: $\frac{5}{9} < p \leq 1 \text{ vagy } p \geq 6$.

56. Az a paraméter mely értékeire lesz a

$$(2a + 1)x^2 - ax + a - 2 = 0$$

egyenletnek két olyan valós gyöke, melyek közül az egyik kisebb, a másik nagyobb 1-nél?

Megoldás:

Tekintsük az $f(x) = (2a + 1)x^2 - ax + a - 2$ másodfokú függvényt.

Ha $2a + 1 > 0$, akkor a grafikon egy felfelé nyíló parabola. Ha az egyik gyök 1-nél nagyobb, a másik 1-nél kisebb, akkor $f(1) < 0$, azaz:

$$2a + 1 - a + a - 2 < 0,$$

$$2a < 1$$

$$a < \frac{1}{2} \text{ és } 2a + 1 > 0, \text{ azaz } a > -\frac{1}{2}.$$

A két egyenlőtlenség egyszerre igaz, ha $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

Ha viszont $2a + 1 < 0$, azaz $a < -\frac{1}{2}$, akkor $f(1) > 0$, azaz $a > \frac{1}{2}$ ami a feltevéssel ellentétes. Így az a -ra vonatkozó feltétel: $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

57. Milyen p -re lesz a

$$(p - 2)x^2 - 2px + p - 1 = 0$$

egyenlet mindkét gyöke pozitív?

Megoldás:

A $(p - 2)x^2 - 2px + p - 1 = 0$ egyenlet valós gyökei léteznek, ha a diszkrimináns: $D \geq 0$.

$$D = 4p^2 - 4(p - 1)(p - 2) \geq 0;$$

$$3p - 2 \geq 0, \quad p \geq \frac{2}{3} \quad (1)$$

A Viète - formulákat felhasználva:

$$\frac{p}{p - 2} > 0 \quad \text{és} \quad \frac{p - 1}{p - 2} > 0;$$

$$p > 2 \quad \text{vagy} \quad p < 0 \text{ és } p > 2 \quad \text{vagy} \quad p < 1,$$

$$\text{ahonnan} \quad p < 0 \quad \text{vagy} \quad p > 2 \quad (2)$$

(1) és (2) alapján: $p > 2$.

58. Az x, y, z valós számok eleget tesznek az

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$$

egyenletnek. Mekkora lehet a $2x + y - z$ kifejezés legnagyobb értéke?

Megoldás:

Legyen $2x + y - z = t$, ahonnan $z = 2x + y - t$; az egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned}x^2 + 3y^2 + (2x + y - t)^2 &= 2; \\5x^2 + 4(y - t)x + 4y^2 - 2ty + t^2 - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Az egyenlet diszkriminánása:

$$D = 16(y - t)^2 - 20(4y^2 - 2ty + t^2 - 2).$$

x - re valós gyök csak úgy lehet, ha $D \geq 0$, azaz:

$$\begin{aligned}4t^2 - 4 \cdot 16(t^2 - 10) &\geq 0; \\t^2 - 16t^2 + 160 &\geq 0; \\15t^2 &\leq 160;\end{aligned}$$

$$t^2 \leq \frac{32}{3}, \text{ ahonnan } t_{max} = \sqrt{\frac{32}{3}}.$$

59. Határozzuk meg a legkisebb x értéket, amelyre léteznek olyan y és z számok, melyek eleget tesznek az alábbi egyenletnek:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Megoldás:

Az adott egyenletet z szerint rendezzük:

$$z^2 - (x + y)z + x^2 + 2y^2 + xy - 1 = 0.$$

Valós gyöke csak úgy lehet, ha az egyenlet diszkriminánása $D \geq 0$.

$$\begin{aligned}D &= (x + y)^2 - 4(x^2 + 2y^2 + xy - 1) \geq 0; \\x^2 + 2xy + y^2 - 4x^2 - 8y^2 - 4xy + 4 &\geq 0; \text{, amit átrendezve:} \\7y^2 + (2x)y + 3x^2 - 4 &\leq 0.\end{aligned}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek y - ra van megoldása, ha a baloldálnak van zérushelye, azaz a

$$\begin{aligned}D_1 &= 4x^2 - 28(3x^2 - 4) \geq 0; \\x^2 - 21x + 28 &\geq 0, \quad \text{ahonnan} \quad x^2 \leq \frac{7}{5}; \\|x| &\leq \sqrt{\frac{7}{5}}.\end{aligned}$$

Az x legkisebb értéke: $x = -\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Egyenletrendszerek

60. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} (x+y)(x+y+z) &= 18, \\ (y+z)(x+y+z) &= 30, \\ (z+x)(x+y+z) &= 24. \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

Az egyenleteket összeadva:

$$2(x+y+z)(x+y+z) = 72;$$

$$(x+y+z)^2 = 36;$$

$$x+y+z = \pm 6.$$

Ha $x+y+z = 6$ akkor az egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} x+y &= 3, \\ y+z &= 5, \\ z+x &= 4. \end{aligned} \right\}$$

Ekkor a megoldás: $x_1 = 1; y_1 = 2; z_1 = 3$.

Ha $x+y+z = -6$ akkor az egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} x+y &= -3, \\ y+z &= -5, \\ z+x &= -4. \end{aligned} \right\}$$

Ekkor a megoldás: $x_2 = -1; y_2 = -2; z_2 = -3$.

61. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} 2x^2 + 2yz - 4x + 1 &= 0, \\ 2y^2 + 2xz - 4y + 1 &= 0, \\ 2z^2 + 2xy - 4z + 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

Az egyenleteke összeadva és megfelelő csoportosítással adódik, hogy

$$(x+y-1)^2 + (y+z-1)^2 + (z+x-1)^2 = 0,$$

ami csak úgy lehet, ha

$$\left. \begin{aligned} x + y - 1 &= 0, \\ y + z - 1 &= 0, \\ z + x - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Az egyenletek összeadásával a következő adódik:

$$2(x + y + z) = 3; \quad x + y + z = \frac{3}{2}.$$

A megoldás: $x = y = z = \frac{1}{2}.$

62. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} x^3 + y^3 &= 19, \\ yx^2 - xy^2 &= 6. \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

Az egyenletből leolvasható, hogy $xy \neq 0$ és $x \neq y$.

Egyenleteinket átalakítva:

$$\left. \begin{aligned} (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= 19 \\ xy(x - y) &= 6. \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletet a másodikkal elosztva:

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{xy} = \frac{19}{6};$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{13}{6} = 0;$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{13}{6}\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0, \text{ ahonnan:}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}; \quad \frac{x}{y} = \frac{2}{3};$$

Ha $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, akkor $x = \frac{3}{2}y$, és így az első egyenlet alapján

$$\frac{27}{8}y^3 - y^3 = 19, \text{ ahonnan } y^3 = 8, \quad y = 2; \quad x = 3.$$

Ha $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, akkor $x = \frac{2}{3}y$,

$$\frac{8}{27}y^3 - y^3 = 19, \text{ ahonnan } y^3 = -27, y = -3; x = -2.$$

63. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 3, \\ x^2 + xy + y^2 &= 7. \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

Az első egyenletet 7 - tel, a másodikat 3 - mal szorozzuk, majd egymásból kivonjuk őket!

$$\left. \begin{aligned} 7x^2 - 7y^2 &= 21 \\ 3x^2 + 3xy + 3y^2 &= 21. \end{aligned} \right\}$$

$$4x^2 - 3xy - 10y^2 = 0$$

Feltehető, hogy $y \neq 0$, ezért y^2 - tel szabad osztani és így

$$4\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} - 10 = 0; \quad \frac{x}{y} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{3 \pm 13}{8};$$

$$x = 2y \quad \text{vagy} \quad y = -\frac{4}{5}x.$$

Az első egyenletet felhasználva:

$$4y^2 - y^2 = 3; \quad x^2 - \frac{16}{25}x^2 = 3;$$

$$y^2 = 1; \quad 9x^2 = 3 \cdot 25;$$

$$y = \pm 1; \quad x = \pm \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

64. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} x^3 - y^2 + x - 1 &= 0, \\ y^3 - x^2 + y - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

A két egyenletet egymásból kivonva:

$$x^3 - y^3 + x^2 - y^2 + x - y = 0;$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + x + y + 1) = 0;$$

$$y = x \text{ vagy } x^2 + (y + 1)x + (y^2 + y + 1) = 0.$$

Az utóbbi egyenlőség viszont nem állhat fenn, mert x - re valós gyök

csak akkor van, ha a diszkrimináns:

$$D = (y + 1)^2 - 4(y^2 + y + 1) \geq 0;$$

$$y^2 + 2y + 1 - 4y^2 - 4y - 4 \geq 0$$

$$3y^2 + 2y + 3 \leq 0.$$

Ez az egyenlőtlenség viszont soha sem teljesül, mert az egyenlőség sem áll, ugyanis $D_1 = 4 - 4 \cdot 9 < 0$.

Ha $y = x$, akkor

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0;$$

$$x^2(x - 1) + (x - 1) = 0;$$

$$(x - 1)(x^2 + 1) = 0.$$

Csak $x = 1$ lehet és ekkor $y = 1$ következik.

65. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 3, \\ xy + xz + yz &= 3. \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

A két egyenletből következik, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2xz + 2yz$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 0$$

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0$$

A kapott egyenlet akkor és csak akkor állhat fenn, ha $x = y = z$.

Az első egyenletből ekkor a következőt kapjuk:

$$3x^2 = 3 \text{ és így } x = \pm 1.$$

A megoldás: $x_1 = y_1 = z_1 = 1$ vagy $x_2 = y_2 = z_2 = -1$.

66. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} xy + x + y &= 3, \\ yz + y + z &= 8, \\ zx + z + x &= 15. \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

Az egyenletek mindkét oldalához 1-et adva, majd szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$\left. \begin{aligned} (x+1)(y+1) &= 4, \\ (y+1)(z+1) &= 9, \\ (x+1)(z+1) &= 16. \end{aligned} \right\}$$

A kapott egyenleteket összeszorozzuk:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 (y+1)^2 (z+1)^2 &= 4 \cdot 9 \cdot 16; \\ (x+1)(y+1)(z+1) &= \pm 24. \end{aligned}$$

Ez utóbbit egybefogva az egyes egyenletekkel:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{3}; \quad y_1 = \frac{1}{2}; \quad z_1 = 5; \\ x_2 &= -\frac{11}{3}; \quad y_2 = -\frac{5}{2}; \quad z_2 = -7. \end{aligned}$$

67. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} x^4 + x^2 y^2 + y^4 &= 133, \\ x^2 - xy + y^2 &= 7. \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert.

Megoldás:

Rendezzük a második egyenletet, majd négyzetre emeljük:

$$\begin{aligned} x^2 + y + 2 &= 7 + xy \\ \underbrace{x^4 + x^2 y^2 + y^4}_{133} + x^2 y^2 &= 49 + 14xy + x^2 y^2 \end{aligned}$$

$$133 = 49 + 14xy$$

$$84 = 14xy, \text{ ahonnan } xy = 6, \text{ mellyel a második egyenlet:}$$

$$x^2 - 6 + y^2 = 7.$$

A kapott eredményekből:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13, \\ 2xy &= 12. \end{aligned} \right\}$$

A két utóbbi egyenlet összeadásával, majd kivonásával:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= 25 & \text{ illetve } & (x-y) = 1; \\ (x+y) &= \pm 5; & & x-y = \pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}
\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} x + y = -5 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} x + y = -5 \\ x - y = -1 \end{array} \right\} \\
2x = 6 & 2x = 4 & 2x = -4 & 2x = -6 \\
x_1 = 3 & x_2 = 2 & x_3 = -2 & x_4 = -3 \\
y_1 = 2 & y_2 = 3 & y_3 = -3 & y_4 = -2
\end{array}$$

68. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\left. \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 2, \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek nincs valós megoldása.

Megoldás:

Vizsgáljuk a második egyenletet x -re, majd y -ra:

x -re valós gyök csak akkor van, ha diszkrimináns nemnegatív, azaz:

$$D_1 = y^2 - 4(y^2 - y) = 4y - 3y^2 \geq 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $0 \leq y \leq \frac{4}{3}$.

y -ra valós megoldás csak akkor van, ha az

$$y^2 - (1 - x)y + x^2 = 0$$

egyenlet diszkriminánsa is nemnegatív, azaz:

$$D_2 = (1 - x)^2 - 4x^2 = -3x^2 - 2x + 1 \geq 0;$$

$$3x^2 + 2x - 1 \leq 0.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása: $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Az x és y maximális értékét tekintve, az első egyenlet baloldala:

$$\frac{1}{7} + \frac{16}{9} = \frac{49}{27} < 2,$$

ezért valóban nem lehet megoldás.

69. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36. \end{array} \right\}$$

Megoldás:

Legyen $P(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 + pt^2 + qt + r$.

A Viète-formulák szerint:

$$p = -(x + y + z) = -6;$$

$$q = xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = \frac{36 - 14}{2} = 11;$$

$$\left. \begin{aligned} q(x + y + z) &= 6q, \\ p(x^2 + y^2 + z^2) &= 14p, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 36. \end{aligned} \right\}$$

Adjuk össze a kapott egyenleteket!

$$(x^3 + px^2 + qx) + (y^3 + py^2 + qy) + (z^3 + pz^2 + qz) = 6q + 14p + 36$$

Mivel $P(x) = P(y) = P(z) = 0$, ezért a zárójelben lévő kifejezések mindegyike $-r$, így a következőt kapjuk:

$$-3r = 66 + 14 \cdot (-6) + 36;$$

$$-3r = 18; \quad r = -6$$

A $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$ egyenlet megoldásai éppen x ; y ; z .

$$t^3 - t^2 - 5t^2 + 5t + 6t - 6 = 0;$$

$$t^2(t - 1) - 5t(t - 1) + 6(t - 1) = 0;$$

$$(t - 1)(t^2 - 5t + 6) = 0$$

$$(t - 1)(t - 2)(t - 3) = 0$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = 2; \quad t_3 = 3.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $(x; y; z)$ alakban:

$(1; 2; 3); (1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3; 1; 2); (3; 2; 1)$.

Irracionális egyenletek

Az alábbi feladatok mindegyikében a megoldásokat a valós számok halmazán keressük.

$$70. \quad \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \sqrt{3}$$

Megoldás:

Fel kell tenni, hogy $-2 \leq x \leq 2$ és $x \neq 0$.

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{3}\sqrt{2+x} - \sqrt{3}\sqrt{2-x}$$

$$(1 + \sqrt{3})\sqrt{2-x} = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2+x}$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$(4 + 2\sqrt{3})(2-x) = (4 - 2\sqrt{3})(2+x)$$

$$4\sqrt{3} = 4x, \quad x = \sqrt{3}.$$

Behelyettesítéssel igazolható, hogy valóban megoldás.

$$71. \quad \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$$

Megoldás:

Legyen $y = \sqrt{2x-5}$, ahol $y \geq 0$. Ekkor:

$$y^2 = 2x - 5; \quad y^2 + 1 = 2x - 4 = 2(x - 2); \quad x - 2 = \frac{1}{2}(y^2 + 1)$$

$$y^2 + 9 = 2x + 4 = 2(x + 2); \quad x + 2 = \frac{1}{2}(y^2 + 9).$$

A kapott összefüggések alapján egyenletünk a következő:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(y^2 + 9) + 3y} + \sqrt{\frac{1}{2}(y^2 + 1) - y} = 2\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{y^2 + 6y + 9} + \sqrt{y^2 - 2y + 1} = 4;$$

$$\sqrt{(y+3)^2} + \sqrt{(y-1)^2} = 4;$$

$$|y+3| + |y-1| = 4, \quad \text{megoldása: } -3 \leq y \leq 1.$$

Mivel $y \geq 0$, ezért csak $0 \leq y \leq 1$ lehet, ahonnan

$$0 \leq \sqrt{2x-5} \leq 1;$$

$$0 \leq 2x - 5 \leq 1;$$

$$5 \leq 2x \leq 6, \text{ ahonnan: } 2,5 \leq x \leq 3.$$

$$72. \quad \sqrt{x - \sqrt{6x - 9}} \sqrt{x + \sqrt{6x - 9}} = \sqrt{6}$$

Megoldás:

Fel kell tennünk, hogy $x \geq 1,5$. Szorozzuk meg az egyenletet $\sqrt{6} -$ tal!

$$\sqrt{6x - 6\sqrt{6x - 9}} + \sqrt{6x + 6\sqrt{6x - 9}} = 6;$$

$$\sqrt{6x - 9 - 6\sqrt{6x - 9} + 9} + \sqrt{6x - 9 + 6\sqrt{6x - 9} + 9} = 6;$$

$$\sqrt{(\sqrt{6x - 9} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{6x - 9} + 3)^2} = 6;$$

$$|\sqrt{6x - 9} - 3| + \sqrt{6x - 9} + 3 = 6;$$

$$|\sqrt{6x - 9} - 3| + \sqrt{6x - 9} = 3;$$

Ha $1,5 \leq x < 3$, akkor $\sqrt{6x - 9} - 3 \leq 0$, így az egyenletünk:

$$3 - \sqrt{6x - 9} + \sqrt{6x - 9} = 3, \text{ ami minden } 1,5 \leq x < 3 \text{ esetén teljesül.}$$

Ha $x \geq 3$, akkor $\sqrt{6x - 9} - 3 \geq 0$, így az egyenletünk:

$$\sqrt{6x - 9} - 3 + \sqrt{6x - 9} = 3;$$

$$\sqrt{6x - 9} = 3, \text{ ahonnan } x = 3 \text{ következik.}$$

Összefoglalva, az egyenlet megoldása: $1,5 \leq x \leq 3$.

$$73. \quad \sqrt{17 - x^2} = (3 - \sqrt{x})^2$$

Megoldás:

Legyen $\sqrt{x} = u$, és $3 - \sqrt{x} = v$; vagyis $u + v = 3$.

Ekkor az egyenletünk a következő alakba megy át:

$$\sqrt{17 - u^4} = v^2, \text{ ahonnan } u^4 + v^4 = 17.$$

$$u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = [(u + v)^2 - 2uv]^2 - 2(uv)^2 =$$

$$= (9 - 2uv)^2 - 2(uv)^2 = 81 - 36uv + 2(uv)^2;$$

$$2(uv)^2 - 36uv + 32 = 0, \text{ melyből } uv = 16; \text{ vagy } uv = 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} u + v = 3 \\ uv = 16 \end{array} \right\} \qquad \qquad \left. \begin{array}{l} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{array} \right\}$$

Az első egyenletrendszernek nincs valós gyöke, a második esetében

$$u_1 = 1; \quad v_1 = 2; \quad u_2 = 2; \quad v_2 = 1.$$

Ezek után az egyenlet megoldása: $x_1 = 1; \quad x_2 = 4$.

$$74. \quad \sqrt{x} - 1 = \frac{2x + 4}{x - 4}$$

Megoldás:

Fel kell tenni, hogy $x \geq 0$; és $x \neq 4$.

$$\sqrt{x} = \frac{2x + 4}{x - 4} + 1 = \frac{3x}{x - 4};$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$x = \frac{9x^2}{(x - 4)^2};$$

$$x(x - 4)^2 - 9x^2 = 0;$$

$$x(x^2 - 17x + 16) = 0;$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor nulla, ha $x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 16$.

Figyelembe véve a kikötéseket, az egyenlet megoldása:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 16.$$

$$75. \quad \sqrt{7x^2 + 8x + 10} - \sqrt{7x^2 - 8x + 10} = 2x$$

Megoldás:

Az egyenlet bármely x -re értelmezve van. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a baloldal konjugáltjával. A nevezetes szorzat alapján kapjuk, hogy:

$$7x^2 + 8x + 10 - (7x^2 - 8x + 10) = 2x(\sqrt{7x^2 + 8x + 10} + \sqrt{7x^2 - 8x + 10});$$

$$16x = 2x(\sqrt{7x^2 + 8x + 10} + \sqrt{7x^2 - 8x + 10});$$

$$8x - x(\sqrt{7x^2 + 8x + 10} + \sqrt{7x^2 - 8x + 10}) = 0;$$

$x_1 = 0$, ami az eredeti egyenletnek is megoldása.

$$\sqrt{7x^2 + 8x + 10} + \sqrt{7x^2 - 8x + 10} = 8;$$

$$\sqrt{7x^2 + 8x + 10} = 8 - \sqrt{7x^2 - 8x + 10};$$

$$7x^2 + 8x + 10 = 64 - 16\sqrt{7x^2 - 8x + 10} + 7x^2 - 8x + 10;$$

$$16\sqrt{7x^2 - 8x + 10} = 64 - 16x;$$

$$\sqrt{7x^2 - 8x + 10} = 4 - x; \text{ fel kell tenni, hogy } x \leq 4;$$

$$7x^2 - 8x + 10 = 16 - 8x + x^2;$$

$$x^2 = 1, \text{ ahonnan: } x_2 = 1; x_3 = -1.$$

Ez utóbbiak is megoldásai az eredeti egyenletnek.

$$76. \quad \sqrt{x^2 - \frac{7}{x}} - \frac{7}{x^2} = x$$

Megoldás:

Fel kell tenni, hogy $x \geq 0$. Az egyenletet átrendezés után négyzetre emelve a következőt kapjuk:

$$\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} = x - \sqrt{x - \frac{7}{x^2}};$$

$$x^2 - \frac{7}{x^2} = x^2 - 2x\sqrt{x - \frac{7}{x^2}} + x - \frac{7}{x^2};$$

$$2x\sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x.$$

Mivel $x \neq 0$, ezért szabad vele osztani:

$$2\sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = 1, \text{ amit négyzetre emelve:}$$

$$4\left(x - \frac{7}{x^2}\right) = 1; \quad 4x^3 - x^2 - 28 = 0;$$

$$4x^3 - 32 - (x^2 - 4) = 0;$$

$$4(x^3 - 8) - (x - 2)(x + 2) = 0;$$

$$4(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2)(x + 2) = 0;$$

$$(x - 2)(4x^2 + 8x + 16 - x - 2) = 0;$$

$$x = 2, \text{ vagy } 4x^2 + 7x + 14 = 0;$$

A kapott másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke, mert

$$D = 49 - 16 \cdot 14 < 0.$$

$$77. \quad \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$$

Megoldás:

Az egyenletet köbre emelve:

$$x + 2x - 3 + 3\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{2x-3} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}) = 12(x-1);$$

$$3(x-1) + 3\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{2x-3} \sqrt[3]{12(x-1)} = 12(x-1);$$

$$\sqrt[3]{x(2x-3)} \sqrt[3]{12(x-1)} = 3(x-1).$$

Ismét köbre emelve:

$$x(2x-3)12(x-1) = 27(x-1)^3;$$

$$4x(2x-3)(x-1) - 9(x-1)^3 = 0;$$

$$(x-1)(8x^2 - 12x - 9x^2 + 18x - 9) = 0;$$

$$(x-1)(-x^2 + 6x - 9) = 0;$$

$$x_1 = 1, \quad \text{vagy} \quad x^2 - 6x + 9 = 0, \quad (x-3)^2 = 0;$$

utóbbiból: $x_2 = x_3 = 3$.

$$78. \quad \sqrt[3]{2x-7} + \sqrt[3]{3x-3} = \sqrt[3]{x-8} + \sqrt[3]{4x-3}$$

Megoldás:

Mindkét oldalt köbre emelve az

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

forma szerint:

$$2x-7 + 3x-3 + 3\sqrt[3]{2x-7} \sqrt[3]{3x-3} (\sqrt[3]{2x-7} + \sqrt[3]{3x-3}) =$$

$$= x-8 + 4x-2 + 3\sqrt[3]{x-8} \sqrt[3]{4x-2} (\sqrt[3]{x-8} + \sqrt[3]{4x-2});$$

$$\sqrt[3]{2x-7} \sqrt[3]{3x-3} (\sqrt[3]{2x-7} + \sqrt[3]{3x-3}) =$$

$$= \sqrt[3]{x-8} \sqrt[3]{4x-2} (\sqrt[3]{x-8} + \sqrt[3]{4x-2});$$

Mivel az eredeti egyenlet szerint a zárójelben lévők egyenlők, ezért:

$$\sqrt[3]{2x-7} \sqrt[3]{3x-3} = \sqrt[3]{x-8} \sqrt[3]{4x-2}, \text{ amit köbre emelve:}$$

$$(2x-7)(3x-3) = (x-8)(4x-2).$$

A műveletek elvégzése és rendezés után:

$$2x^2 + 7x + 5 = 0;$$

$$x_{1;2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{-7 \pm 3}{4};$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = -2, 5.$$

Ha viszont mindkét oldalon a zárójeles rész nulla, azaz

$$\sqrt[3]{x-8} + \sqrt[3]{4x-2} = 0, \quad \text{akkor}$$

$$\sqrt[3]{x-8} = -\sqrt[3]{4x-2}$$

$$x-8 = -(4x-2)$$

$5x = 10, \quad x_3 = 2$, ami szintén megoldás az eredeti egyenletnek.

Trigonometrikus egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

79. $(1 + \cos x) \operatorname{tg} x = \sin 2x$

Megoldás:

$$(1 + \cos x) \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \sin x \cos x;$$

$$(1 + \cos x) \cos x - 2 \cos x \sin^2 x = 0;$$

$$(1 + \cos x) \cos x - 2 \cos x (1 + \cos x) (1 - \cos x) = 0;$$

$$\cos x (1 + \cos x) (2 \cos x - 1) = 0;$$

$$\cos x = 0, \text{ vagy } 1 + \cos x = 0 \text{ vagy } 2 \cos x - 1 = 0;$$

$$x_1 = (2k + 1) \frac{\pi}{2}; \cos x = -1 \text{ nem lehet a kikötés miatt,}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + 2m\pi; \quad x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi,$$

ahol $k; m, n \in \mathbb{Z}$.

80. $(\sin 2x - \cos 2x)^2 + \sin 6x = 1$

Megoldás:

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x + \sin 6x = 1;$$

$$1 - \sin 4x + \sin 6x = 1;$$

$$\sin 6x = \sin 4x;$$

$$6x = 4x + 2k\pi, \quad \text{vagy} \quad 6x + 4x = \pi + 2m\pi;$$

$$x_1 = k\pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5}, \text{ ahol } k; m \in \mathbb{Z}.$$

81. $3 \sin^3 x + \cos^3 x = 2 \sin x + \cos x$

Megoldás:

$$3 \sin^3 x - 2 \sin x = \cos x - \cos^3 x;$$

$$\sin x (3 \sin^2 x - 2) = \cos x \sin^2 x;$$

$$\sin x (3 \sin^2 x - 2 - \sin x \cos x) = 0;$$

$$\sin x = 0, \quad \text{vagy} \quad 3 \sin^2 x - \sin x \cos x - 2 (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$$

$$x_1 = k\pi; \quad \sin^2 x - 2 \cos^2 x - \sin x \cos x = 0;$$

$$(\sin x + \cos x) (\sin x - \cos x) - \cos x (\cos x + \sin x) = 0;$$

$$\sin x + \cos x = 0, \quad \text{vagy} \quad \sin x - 2 \cos x = 0;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= -1; & \operatorname{tg} x &= 2; \\ x_2 &= \frac{3\pi}{4} + m\pi; & x_3 &= 63,43^\circ + n\pi \text{ ahol } k; m; n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$82. \quad \cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \cos x + 2\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) &= 1; \\ 4\cos x - 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2 &= 0; \\ 4\cos x(1 - \cos^2 x) - 2(1 - \cos^2 x) &= 0; \\ \sin^2 x(2\cos x - 1) &= 0; \\ \sin x = 0, & \quad \text{vagy} \quad \cos x = \frac{1}{2}; \\ x_1 = k\pi; x_2 = \frac{\pi}{3} + 2m\pi; x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi, & \text{ ahol } k; m; n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$83. \quad \cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$$

Megoldás:

$$\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$$

Ismeretes, hogy

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha.$$

Az idézett formulák alapján egyenletünk:

$$2 \cos 4x \cos 2x = 2 \cos^2 4x, \quad \text{ahonnan}$$

$$\cos 4x (\cos 4x - \cos 2x) = 0;$$

$$\cos 4x = 0, \quad \text{vagy} \quad \cos 4x = \cos 2x;$$

$$x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{8} \quad \text{illetve} \quad 4x = 2x + 2m\pi, \text{ vagy } 6x = 2n\pi;$$

$$x_2 = m\pi; \quad x_3 = \frac{n\pi}{3}, \text{ ahol } k; m; n \in \mathbb{Z}.$$

$$84. \quad \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$$

Megoldás:

Az előző feladat megoldásában idézett formula alapján

$$\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos 3x \cos x \quad \cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x,$$

ezért:

$$2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 3x \cos x = 0;$$

$$\cos x (\cos 2x + \cos 3x) = 0;$$

$$\cos x = 0, \quad \text{vagy} \quad \cos 2x + \cos 3x = 0;$$

$$x_1 = (2k + 1) \frac{\pi}{2}; \quad 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0;$$

$$\cos \frac{5x}{2} = 0, \quad \text{vagy} \quad \cos \frac{x}{2} = 0;$$

$$\frac{5x}{2} = (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \text{vagy} \quad \frac{x}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2};$$

$$x_2 = (2m + 1) \frac{\pi}{5}, \quad x_3 = (2n + 1) \pi. \text{ ahol } k; m; n \in \mathbb{Z}.$$

85. $\cos 3x - \sin 6x + \sin 2x - \cos 7x = 0$

Megoldás:

$$\cos 3x - \cos 7x = \sin 6x - \sin 2x;$$

$$-2 \sin 5x \sin (-2x) = 2 \cos 4x \sin 2x;$$

$$\sin 5x \sin 2x - \cos 4x \sin 2x = 0;$$

$$\sin 2x (\sin 5x - \cos 4x) = 0;$$

$$\sin 2x = 0, \text{ vagy } \sin 5x - \cos 4x = 0;$$

$$2x = k\pi, \quad \text{vagy} \quad \sin 5x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right);$$

$$x_1 = \frac{k\pi}{2},$$

$$5x = \frac{\pi}{2} - 4x + 2n\pi, \text{ vagy } 5x + \frac{\pi}{2} - 4x = \pi + 2n\pi;$$

$$9x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{18} + \frac{2m\pi}{9}; \quad x_3 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

86. $\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos x = 0, 5$

Megoldás:

Alkalmazzuk a következő összefüggést:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x + y) + \cos (x - y)].$$

$$\frac{1}{2} (\cos 2x + \cos x) + \cos x = 0, 5;$$

$$\cos 2x + 3 \cos x = 1;$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0;$$

$$\cos x_{1;2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4};$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad \cos x = -2, \text{ utóbbi lehetetlen.}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \quad x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2m\pi, \text{ ahol } k; m \in \mathbb{Z}.$$

87. $\cos^2 x - \cos^2 2x + \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$

Megoldás:

$$\cos^2 4x - \cos^2 2x + \cos^2 3x - \cos^2 x = 0;$$

$$(\cos 4x + \cos 2x)(\cos 4x - \cos 2x) +$$

$$+ (\cos 3x + \cos x)(\cos 3x - \cos x) = 0;$$

A $\cos \alpha + \cos \beta$, illetve a $\cos \alpha - \cos \beta$ formuláit alkalmazva:

$$2 \cos 3x \cos x (-2 \sin 3x \sin x) + 2 \cos 2x \cos x (-2 \sin 2x \sin x) = 0;$$

$$\sin 2x \sin 6x + \sin 2x \sin 4x = 0;$$

$$\sin 2x (\sin 6x + \sin 4x) = 0;$$

$$2 \sin 2x \sin 5x \cos x = 0;$$

$$\sin 2x = 0, \quad \text{vagy} \quad \sin 5x = 0; \quad \text{vagy} \quad \cos x = 0;$$

$$x_1 = \frac{k\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{m\pi}{5}; \quad x_3 = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ ahol } k; m; n \in \mathbb{Z}.$$

88. $\sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) = \cos 3x - \sin 3x$

Megoldás:

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \cos 3x + \sqrt{3} \sin x;$$

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $\frac{1}{2}$ -el!

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x;$$

Az összegzési formulák miatt:

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right);$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x - \frac{\pi}{6} + 3x - \frac{\pi}{3} = 2m\pi;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2}, \text{ ahol } k; m \in \mathbb{Z}.$$

89. $\sin 3x \cos 3x = \sin 2x$

Megoldás:

$$2 \sin 3x \cos 3x = 2 \sin 2x$$

$$\sin 6x = 2 \sin 2x;$$

$$\sin 6x - \sin 2x = \sin 2x;$$

Ismeretes, hogy $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ ezért:

$$2 \cos 4x \sin 2x - \sin 2x = 0;$$

$$\sin 2x (2 \cos 4x - 1) = 0;$$

$$\sin 2x = 0; \quad \text{vagy} \quad \cos 4x = \frac{1}{2};$$

$$x_1 = \frac{k\pi}{2}; \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{m\pi}{2}.$$

90. $2 \sin 11x + \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = 0$

Megoldás:

$$\cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = -2 \sin 11x;$$

$$\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x = \sin(-11x);$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(-11x);$$

$$3x + \frac{\pi}{6} = -11x + 2k\pi, \quad \text{vagy} \quad 3x - \frac{\pi}{6} - 11x = \pi + 2m\pi;$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{84} + \frac{k\pi}{7}; \quad x_2 = -\frac{5\pi}{48} - \frac{m\pi}{4}.$$

91. $\sin^4 x + \sin^4 2x + \sin^4 3x = \cos^4 x + \cos^4 2x + \cos^4 3x$

Megoldás:

Először tekintsük a következő átalakítást:

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$

Az egyenletet átrendezve, majd felhasználva a mondottakat:

$$\cos^4 3x - \sin^4 3x + \cos^4 2x - \sin^4 2x + \cos^4 x - \sin^4 x = 0;$$

$$\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x = 0;$$

$$\cos 4x (2 \cos 2x + 1) = 0;$$

$$\cos 4x = 0, \quad \cos 2x = -\frac{1}{2};$$

$$x_1 = (2k+1) \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + m\pi, \quad \text{ahol } k; m \in \mathbb{Z}.$$

Egyenlőtlenségek

92. Az ABC háromszög oldalai a, b, c , amelyekre $a + b + c = 1$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$$

Bizonyítás:

A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség miatt:

$$\left. \begin{array}{l} a + b > c, \\ b + c > a, \\ c + a > b. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} c(a + b) > c^2, \\ a(b + c) > a^2, \\ b(c + a) > b^2. \end{array} \right\}$$

A beszorzások elvégzése után az egyenlőtlenségeket adjuk össze:

$$2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2;$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2);$$

$$(a + b + c)^2 > 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

A feltétel szerint $a + b + c = 1$, és így:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) < 1, \quad \text{ahonnan:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}, \quad \text{és ezt kellett igazolni.}$$

93. Legyenek a és b valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$2(a^4 + b^4) \geq (a + b)(a^3 + b^3)$$

Bizonyítás:

$$2a^4 + 2b^4 \geq a^4 + ab^3 + a^3b + b^4$$

$$a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 \geq 0$$

$$a^3(a - b) - b^3(a - b) \geq 0$$

$$(a - b)(a - b)(a^2 + ab + b^2) \geq 0$$

$$(a - b)^2 \left[\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right] \geq 0, \quad \text{ezzel az állítást beláttuk.}$$

94. Bizonyítsuk be, hogy a, b, c tetszőleges valós számokra

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

Bizonyítás:

Használjuk fel az ismert $a^2 + b^2 \geq 2ab$ egyenlőtlenséget!

$$\begin{aligned} 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 &= (a^4 + b^4) + (a^4 + c^4) + (b^4 + c^4) \geq \\ &\geq 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = (a^2b^2 + b^2c^2) + \\ &+ (a^2b^2 + a^2c^2) + (a^2c^2 + b^2c^2) \geq 2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2 = \\ &= 2abc(a + b + c). \end{aligned}$$

Kettővel osztva a kapott $2a^4 + 2b^4 + 2c^4 \geq 2abc(a + b + c)$ egyenlőtlenséget, kapjuk az igazolandó állítást.

95. A háromszög oldalai: a, b, c ; kerülete: $2s = a + b + c$.

Bizonyítsa be, hogy

$$(s - a)(s - b)(s - c) \leq \frac{abc}{8}$$

Bizonyítás:

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$(s - a)(s - b) \leq \left(\frac{s - a + s - b}{2} \right)^2 = \left(\frac{2s - a - b}{2} \right)^2 = \left(\frac{c}{2} \right)^2.$$

Hasonló módon adódik, hogy:

$$(s - a)(s - c) \leq \left(\frac{b}{2} \right)^2, \quad (s - b)(s - c) \leq \left(\frac{a}{2} \right)^2.$$

A kapott egyenlőtlenségeket összeszorozva:

$$(s - a)^2 (s - b)^2 (s - c)^2 \leq \left(\frac{abc}{8} \right)^2, \quad \text{ahonnan:}$$

$$(s - a)(s - b)(s - c) \leq \frac{abc}{8}, \quad \text{amit igazolni kellett.}$$

96. Bizonyítsa be, hogy

$$\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} \leq 5,$$

ha $a + b + c = 1$ és a gyökök értelmezve vannak.

Bizonyítás:

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva, akapjuk, hogy:

$$\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1) \cdot 1} \leq \frac{4a+1+1}{2} = 2a+1.$$

Hasonló módon adódik, hogy:

$$\sqrt{4b+1} \leq 2b+1; \quad \sqrt{4c+1} \leq 2c+1.$$

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 2(a+b+c) + 3 = 5,$$

amit igazolni kellett, ugyanis a feltétel szerint $a+b+c=1$.

Megjegyzés:

Erősebb becslés is adható más módszerrel.

Vezessük be az $\underline{a}(\sqrt{4a+1}; \sqrt{4b+1}); \sqrt{4c+1}$ és $\underline{b}(1; 1; 1)$ vektorokat.

Ismert, hogy $\underline{ab} \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$, ezt alkalmazva kapjuk:

$$\begin{aligned} \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} &\leq \sqrt{4a+1+4b+1+4c+1} \sqrt{1+1+1} = \\ &= \sqrt{4(a+b+c)+3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{7} \sqrt{3} = \sqrt{21}. \end{aligned}$$

Közben felhasználtuk, hogy

$$|\underline{a}| = \sqrt{4a+1+4b+1+4c+1}, \quad |\underline{b}| = \sqrt{3}.$$

97. Bizonyítsa be, hogy ha

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+a},$$

akkor $x+y \geq 2a$.

Bizonyítás:

Könnyen igazolható, hogy

$$2(u^2 + v^2) \geq (u+v)^2$$

egyenlőtlenség tetszőleges $u; v$ valós számokra igaz.

Az idézett egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$2(1+x+1+y) \geq 4(1+a) = 4+4a;$$

$$2(2+x+y) \geq 4+4a;$$

$$2+x+y \geq 2+2a, \text{ ahonnan}$$

$$x+y \geq 2a, \text{ amit igazolni kellett.}$$

98. Ismeretes hogy $a^5 - a^3 + a = 2$.

Bizonyítsuk be, hogy $3 < a^6 < 4$.

Bizonyítás:

A feltételi egyenletből világos, hogy $a > 1$ lehet. Egyenletünket szabad a -val osztani és így

$$\begin{aligned}a^4 - a^2 + 1 &= \frac{2}{a}; \\(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) &= \frac{2}{a} \cdot (a^2 + 1); \\(a^3)^2 + 1 &= 2 \cdot \frac{a^2 + 1}{a}; \\a^6 + 1 &= 2 \left(a + \frac{1}{a} \right).\end{aligned}$$

Mivel $a > 1$, ezért $a + \frac{1}{a} > 2$, ezért

$$a^6 + 1 > 4, \text{ ahonnan } a^6 > 3.$$

A feltételi egyenlet

$$a^5 + a = a^3 + 2$$

alakban is felírható.

Mindkét oldalt a^3 -al szabad osztani a kikötés miatt és így

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 1 + \frac{2}{a^3}.$$

Most $a^2 + \frac{1}{a^2} > 2$ igaz és így

$$1 + \frac{2}{a^3} > 2, \text{ ahonnan } a^3 < 2.$$

A két részt összetéve kapjuk az igazolandó állítást: $3 < a^6 < 4$.

99. Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 2$ és természetes szám, akkor

$$\sqrt[n]{(n!)^3} \leq \frac{n(n+1)^2}{4}$$

Bizonyítás:

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget fogjuk felhasználni.

$$\sqrt[n]{(n!)^3} = \sqrt[n]{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^3} \leq \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n}.$$

Ismeretes, hogy

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{(n!)^3} \leq \frac{n(n+1)^2}{4}$$

100. Bizonyítsuk be, hogy

$$\log_a(abc) + \log_b(abc) + \log_c(abc) \geq 9,$$

ha $a, b, c \in]0; 1[$

Bizonyítás:

Az egyenlőtlenség baloldalát átalakítjuk:

$$\begin{aligned} \log_a(abc) + \log_b(abc) + \log_c(abc) &= 1 + \log_a b + \log_a c + \log_b a + 1 + \\ &\log_b c + \\ &+ \log_c a + \log_c b + 1 = 3 + (\log_a b + \log_b a) + (\log_a c + \log_c a) + \\ &+ (\log_b c + \log_c b). \end{aligned}$$

A feltevés miatt a logaritmusok pozitívak.

Ismeretes, hogy

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \text{ illetve } n > 0 - \text{ra } n + \frac{1}{n} \geq 2.$$

Ugyanez mondható a másik két zárójeles kifejezésről és így

$$\log_a(abc) + \log_b(abc) + \log_c(abc) \geq 3 + 3 \cdot 2 = 9,$$

és ezt kellett igazolni.