

Geometriai gyakorló feladatok

Megoldások

Összeállította: Dr. Tóber Ernő, Nagykanizsa, 1980.

1. Egy konvex sokszög belső szögeit – egy kivételével – összeadva 2570^0 adódik. Mekkora lehet a kimaradt szög?

Megoldás:

Ismeretes, hogy az n oldalú sokszög belső szögeinek az összege $(n - 2) \cdot 180^0$. Mivel konvex sokszögről van szó, ezért a kimaradt szög α_k , amelyre $0 < \alpha_k < 180^0$.

A feltétel szerint

$$\alpha_k + 2570^0 = (n - 2) \cdot 180^0;$$

$$\alpha_k = n \cdot 180^0 - 360^0 - 2570^0$$

$$\alpha_k = n \cdot 180^0 - 2930^0;$$

$$0 < n \cdot 180^0 - 2930^0 < 180^0$$

$$2930^0 < n \cdot 180^0 < 3110^0;$$

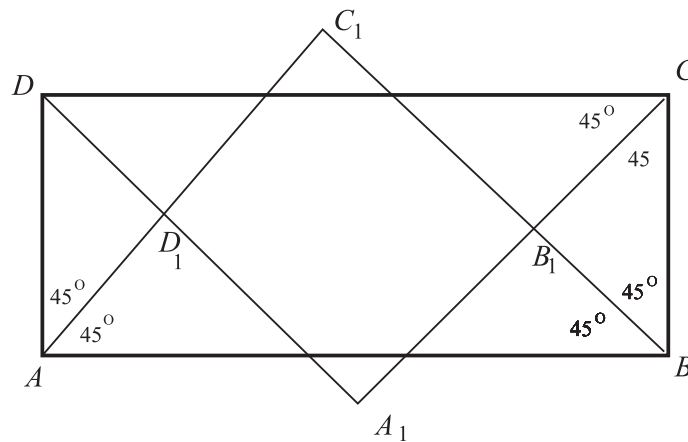
$$\frac{2930^0}{180^0} \approx 16,28 < n < \frac{3110^0}{180^0} \approx 17,28;$$

$n = 17$, tekintettel arra, hogy n egész szám.

$$\alpha_k = 17 \cdot 180^0 - 2930^0, \quad \alpha_k = 130^0.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy a téglalap szögfelezői négyzetet határolnak.

Megoldás:



Szimmetria okok miatt $ABC_1 \cong CDA_1$ és derékszögű, továbbá $BCB_1 \cong ADD_1$.

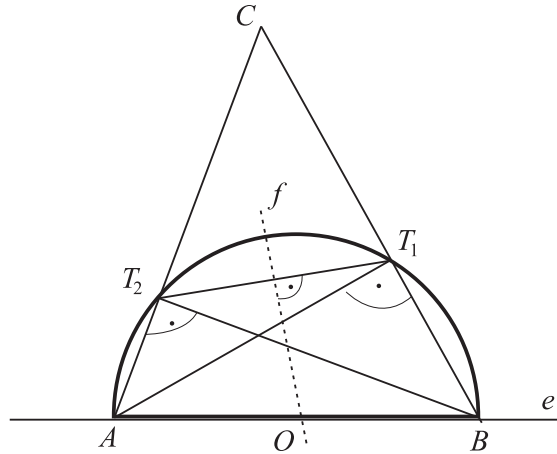
Így már világos, hogy $A_1B_1C_1D_1$ minden szöge 90^0 – os, oldalai is egyenlők, mert az egyenlő $CA_1 = BC_1$ oldalakból elvesszük a szintén egyenlő $CB_1 = BB_1$ szakaszokat, így $A_1B_1 = B_1C_1$, azaz négyzetről van szó.

3. Adott egy háromszög egyik oldalának egyenese és a másik két oldalhoz tartozó magasságának talppontja. Szerkesszük meg a háromszöget.

Megoldás:

Képzeldük a feladatot megoldottnak.

Thalész-tétele miatt a T_1 ; T_2 magasságtalppontok rajta vannak az AB Thalész-körén.



Mivel $T_1; T_2$ a kör húrja, ezért felezőmerőlegese keresztül megy a kör O középpontján.

Szerkesztés:

Az e egyenes ugyanazon félsíkjában felvesszük a $T_1; T_2$ pontokat. A T_1T_2 szakasz felezőmerőlegese és az e egyenes metszéspontja lesz a kör O középpontja.

Az $r = OT_1 = OT_2$ sugarú kört megrajzolva megkapjuk az A és B csúcsokat. Az AT_2 és BT_1 metszéspontja megadja a C csúcsot. Thalész-tétele miatt T_1 és T_2 valóban magasságtalppontjai.

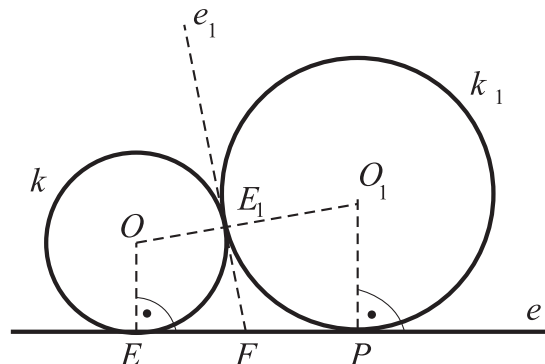
A T_1 és T_2 felvételénél arra kell ügyelni, hogy $T_1; T_2$ ne legyen merőleges e -re.

Mivel ABT_2 és ABT_1 derékszögű háromszögekben A - náé és B - nél hegyesszög van, ezért az A -ból és B -ből induló, $|AB|$ -től különböző szögszarak valóban metszik egymást a T_1 és T_2 pontokat tartalmazó félsíkban, annak valamely C pontjában.

4. Adott egy kör, annak E pontjában az érintő és azon egy P pont. Szerkesszük meg azt a kört, amely az adott kört és az érintőt a megadott P pontban érinti.

Megoldás:

Az adott k és s szerkesztendő k_1 kör érintési pontja E_1 . Rajzoljuk meg az E_1 - belüli



közös érintőt (e_1), amely metszi e -t valamely F pontban. Mivel a külső pontból húzott

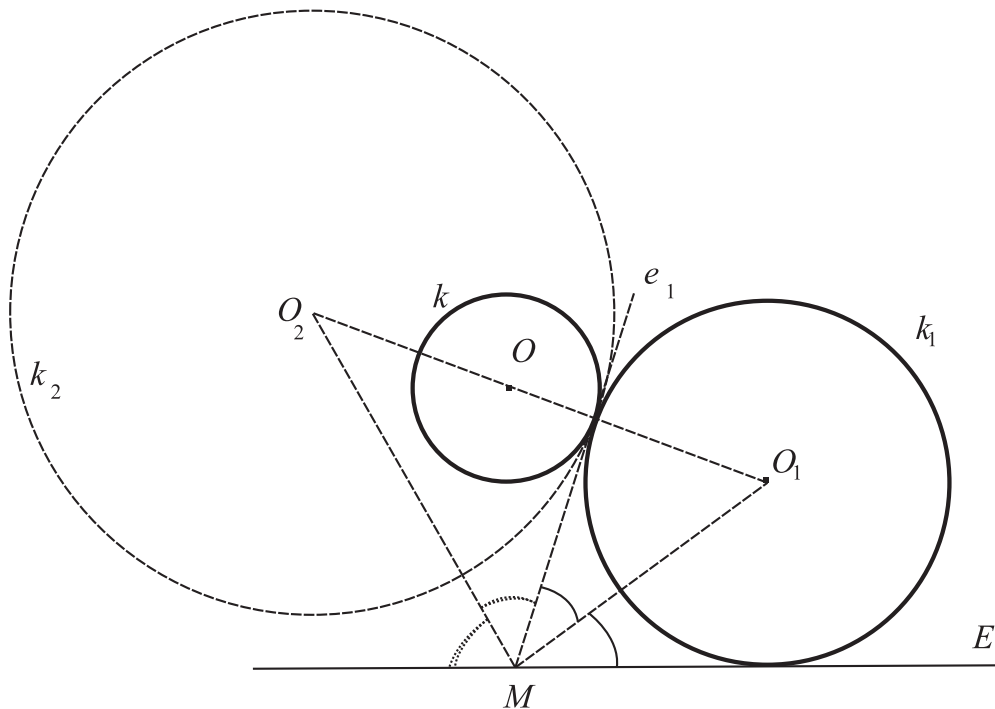
érintőszakaszok egyenlők, ezért $FE = FE_1$; $FE_1 = FP$ melyből $EF = FP$, vagyis F az EP szakasz felezőpontja. Mivel $FE_1 = FE$, ezért E_1 rajta van EP Thalész - körén.

Szerkesztés:

Az adott körön felvesszük az E pontot és az E - beli érintőt. Ezen kijelöljük a P pontot. Megrajzolva EP Thalész-körét, metszéspontként adódik E_1 . Az OE_1 és a P - beli merőleges kimetszik a keresett kör O_1 középpontját. Bármely E - től különböző P esetén egyetlen megoldás van.

5. Adott egy k kör és ennek síkjában egy e egyenes. A megadott körön vegyünk fel egy E pontot. Szerkesszünk kört, amely érinti az e egyenest és a megadott kört az E pontban. Megoldás:

Rajzoljuk meg az adott k kör E - beli érintőjét, amely érintője a keresett k_1 körnek

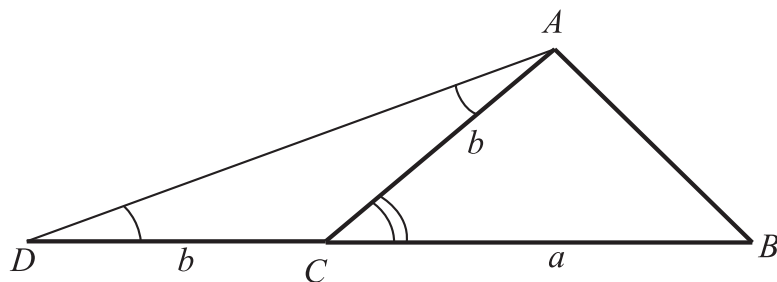


is. Tegyük fel, hogy e és e_1 metszik egymást valamilyen M pontban. Mivel e és e_1 érintői a keresett körnek, ezért O_1 középpont rajta van az előbbi két egyenes szögfelezőjén. Az OE egyenes és a szögfelező metszéspontja adja a keresett kör középpontját. Mivel M - nál két szög is van, ezért a feladatnak két megoldása lehet k_1 és k_2 .

Ha az E - beli érintő párhuzamos e - vel, akkor csak egy megoldás van, a kör átmérője E - nek e - től való távolsága.

6. Adva van egy háromszög két oldalának összege és a két oldal által bezárt szög. Szerkesszük meg a háromszöget úgy, hogy a harmadik oldal a lehető legkisebb legyen. Megoldás:

A szokásos betűzés mellett vegyük adottnak $a + b - t$ és az $ACB\angle$ szöget.



A D pontot úgy kaptuk, hogy a háromszög a oldalát meghosszabbítottuk b – vel. Az $ACD\triangle$ egyenlő szárú. a külső szögek tétele alapján

$$ACB\angle = 2CAD\angle \quad \text{melyből} \quad CDA\angle = \frac{1}{2}ACB\angle.$$

AB akkor a legkisebb, ha merőleges CD – re.

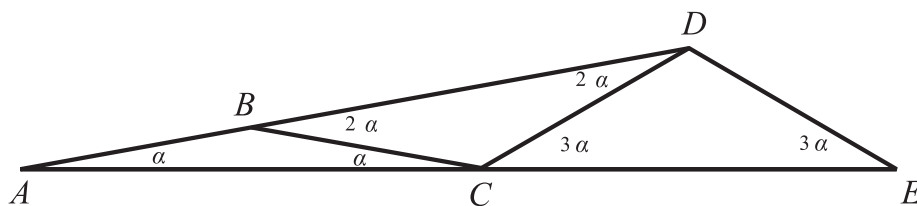
Szerkesztés:

Felvesszük a D csúcsú $CDA\angle$ szöget az egyik szárra felmérjük az adott $DB = a + b$ szakaszt. B – ből merőlegest bocsátunk a másik szögszárra és így kapjuk az ABD derékszögű háromszöget. Az AD befogó felező merőlegese metszi a BD befogót C pontban. Derékszögű háromszögben az egyik befogó felező merőlegese párhuzamos AB – vel és így középvonal egyenese is. Ily módon $AC = CD$ és $CD = BC$, melyből: $AC = BC$ adódik, vagyis egyenlő szárú háromszög esetén lesz a legkisebb az adott szöggel szemközti oldal, ha a szöget közrefogó két oldal összege adott.

7. Az ADE háromszögben $ADE\angle = 140^\circ$, B az AD , C pedig az AE oldalon felvett olyan pontok, amelyre $AB = BC = CD = DE$. Mekkora az $EAD\angle$?

Megoldás:

Készítsük el a következő ábrát.



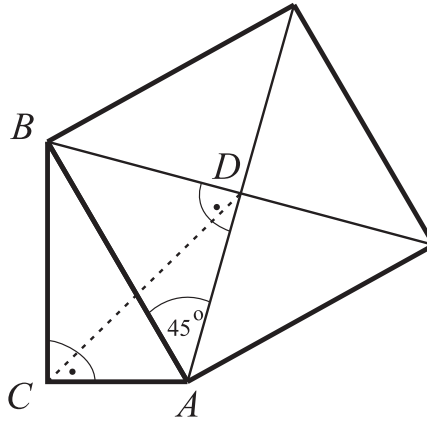
A feltevés szerint $AB = BC = CD = DE$. Ebből következik, hogy az $ABC\triangle$; $BCD\triangle$; és a $CDE\triangle$ háromszögek egyenlő szárúak. A külső szögek tételét alkalmazva, a mondottakra tekintettel az $ADE\triangle$ szögeire:

$$\alpha + 3\alpha + 140^\circ = 180^\circ;$$

$$\alpha = 10^\circ.$$

8. Az ABC háromszög AB átfogójára a háromszöggel ellentétes oldalon szerkesszünk négyzetet. A négyzet D szimmetria középpontját kössük össze C – vel. Bizonyítsuk be, hogy CD felezi az ACB szöget.

Megoldás:



Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, mert két szemközti szögének az összege 180° .

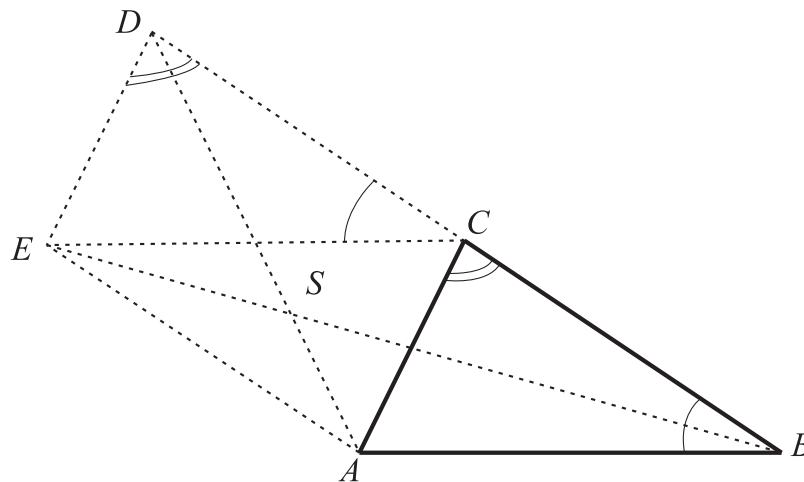
A kerületi szögek tétele miatt

$$\angle BCD = \angle BAD = 45^\circ;$$

vagyis CD valóban felezi a $\triangle BCA$ szöget és ezt kellett megmutatni.

9. Az ABC háromszög BC oldalát hosszabbítsuk meg C -n túl $CD = BC$ szakasszal. A C ponton át az AB -vel, a D ponton át az AC -vel húzott párhuzamos egyenesek metszéspontja E . Igazoljuk, hogy az ACE és az ABC háromszögek egybevágók. Igaz-e hogy az AD és a BE egyenesek S metszéspontja az ACE háromszög súlypontja?

Megoldás:



A feltételek: $BC = CD$; $AB \parallel CE$; $AC \parallel DE$.

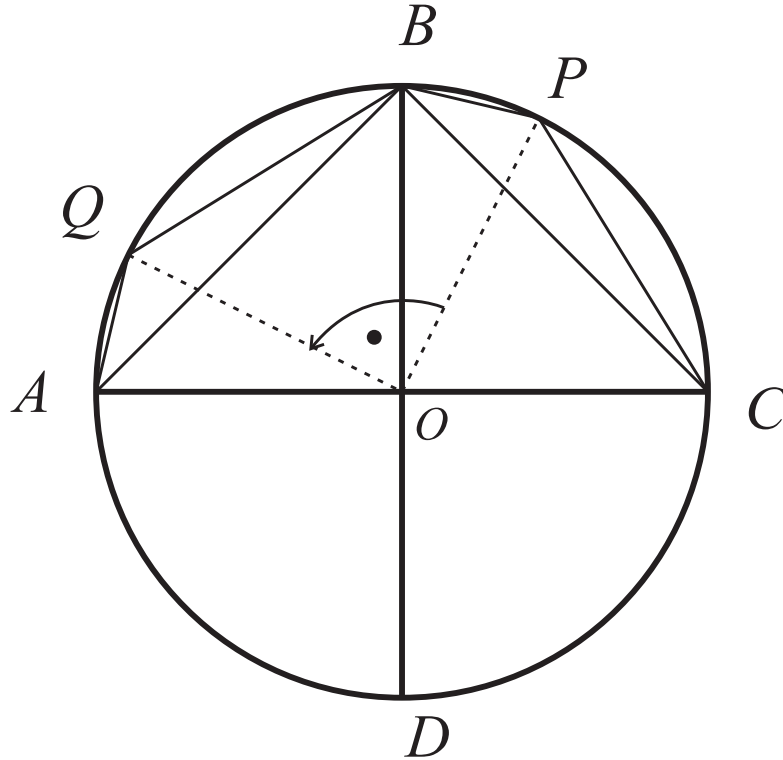
A feltételek miatt az azonos módon jelölt szögek egyenlők.

$\triangle ABC \cong \triangle CDE$, mert egy oldal és a rajta lévő két szög egyenlő.

Ebből következik, hogy $AB \parallel CE$ illetve $AC \parallel DE$ és így $ABCE$ és $ACDE$ paralelogrammák. A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért AD és BE az $\triangle ACE$ súlyvonal egyenesei és így metszéspontjuk valóban az S súlypont, ugyanis két súlyvonal a súlypontot egyértelműen meghatározza.

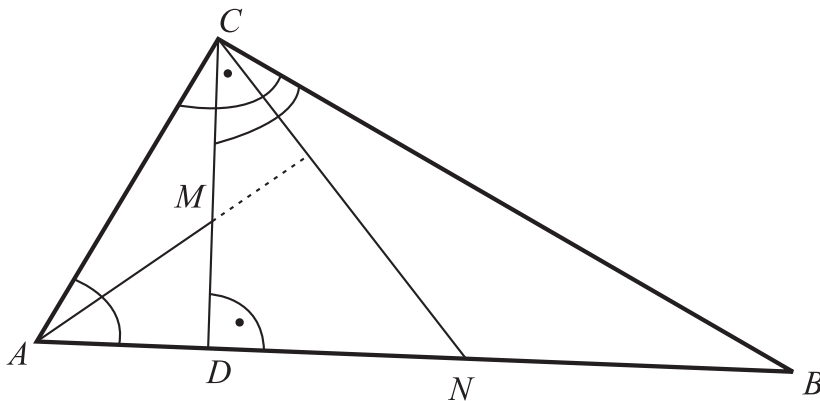
10. Legyen AC , illetve BD az O középpontú kör két egymásra merőleges átmérője. Legyen P a rövidebb BC ív, Q a rövidebb AB ív olyan pontja, hogy $\angle POQ = 90^\circ$. Bizonyítsa be, hogy a $\triangle BCP \cong \triangle ABQ$.

Megoldás:



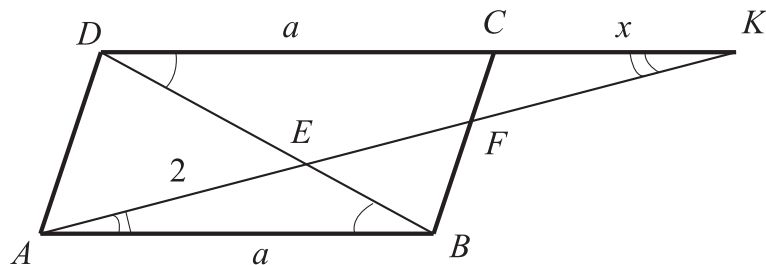
A kör O középpontja körüli $+90^\circ$ -os elforgatáskor $C \rightarrow B$; $P \rightarrow Q$; $B \rightarrow A$ megy át. Ebből következik, hogy $ABQ\Delta \cong BCP\Delta$, mert oldalaik páronként egyenlők.

11. A C – ben derékszögű ABC háromszög átfogójához tartozó magasság CD . Igazoljuk, hogy az ADC háromszög AM és a CDE háromszög CN súlyvonalainak egyenesei merőlegesek egymásra.



$ACD\Delta \cong BCD\Delta$, mert két szögük páronként egyenlő. A megfelelő oldalaik merőlegesek, ezért a megfelelő súlyvonaak is merőlegesek, azaz $AM \perp CN$.

12. Az $ABCD$ paralelogramma A csúspontján áthaladó egyenes a BD átlót az E , a BC oldalt az F , a DC oldal meghosszabbítását a K pontban metszi. Számítsa ki az EF szakasz hosszát, ha $AE = 2$ egység és $EK=3$ egység.



$ABE\triangle \cong DEK\triangle$, mert két-két szögük páronként egyenlő. Ebből következik, hogy a megfelelő oldalaik aránya is egyenlő:

$$\frac{a+x}{a} = \frac{3}{2} \implies 2a+2x=3a; \implies x = \frac{a}{2}.$$

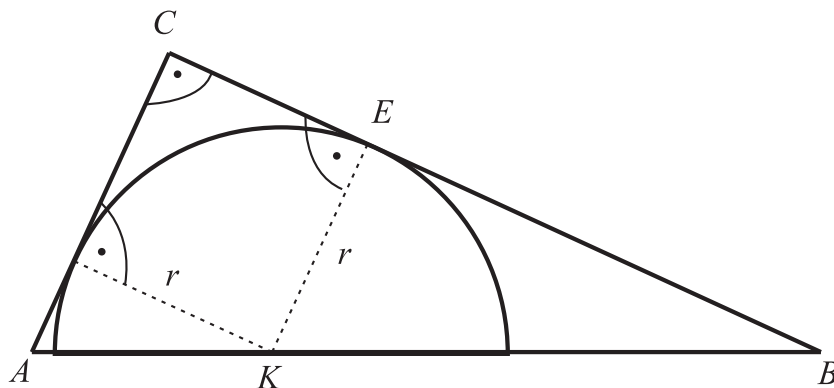
Az $ABF\triangle \cong CFK$, ezért:

$$\frac{2+EF}{3-EF} = \frac{a}{x} = 2, \text{ ahonnan}$$

$$2+EF = 6-2EF, \quad EF = \frac{4}{3}.$$

13. A derékszögű háromszög befogóinak hossza 5, illetve 12 egység. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja az átfogón van és a befogókat érinti?

Megoldás:



$ABC\triangle \sim KBE\triangle$, mert két-két megfelelő szögük egyenlő.

Ebből következik, hogy

$$\frac{EK}{AC} = \frac{EB}{BC};$$

$$\frac{r}{5} = \frac{12-r}{12};$$

$$12r = 60 - 5r;$$

$$r = \frac{60}{17}.$$

14. Mekkora a rombusz oldala, ha a beírható kör sugara 2 egység és az egyik átló a rombuszt szabályos háromszögekre bontja?

Megoldás:

Az a oldalú szabályos háromszög magassága a rombusz beírható körének az átmérője,

Ismeretes, hogy a szabályos háromszög magassága:

Ha $m = 4$, akkor $a = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4,62$ egység.

- Megoldás:

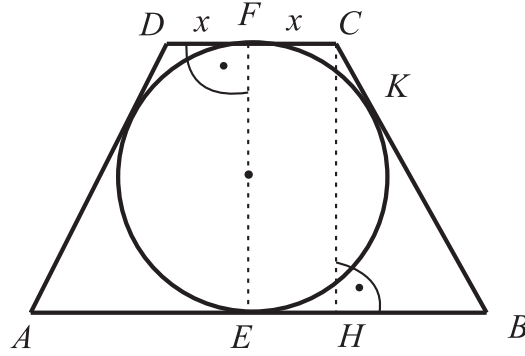
Diagram illustrating a circle inscribed in a right triangle ABC . The circle is tangent to the sides AC , AB , and BC at points K , E , and F respectively. The center of the circle is marked with a dot. Dashed lines connect the center to the points of tangency K , E , and F , each labeled with the radius r . Right angle symbols are shown at vertices C and K . The angle at vertex E is labeled with an arc.

$$(r + 5)^2 + (r + 12)^2 = 17^2 \quad \text{ahonnan:}$$

$r_1 = 3$; $r_2 = -20$, utóbbi viszont nem lehet.

8

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit.

Az érintőszakaszok egyenlősége miatt $CK = CF = x$; másrészt $BH = 5 - x$.

Pithagorasz-tételét alkalmazva:

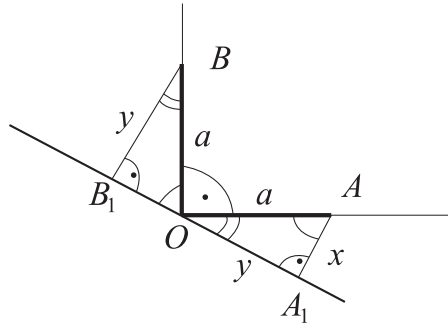
$$(x + 5)^2 - (5 - x)^2 = 6^2;$$

$$20x = 36; \quad x = 1,8;$$

$$BC = CD = 6,8 \text{ illetve } CD = 3,6 \text{ egység.}$$

17. Egy derékszög száraira a csúctól felmérjük ugyanazt az a szakaszt. A kapott végpontoknak a derékszög csúcsán áthaladó tetszőleges egyenestől való távolsága legyen x és y . Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + y^2$ értéke nem függ az egyenes helyzetétől.

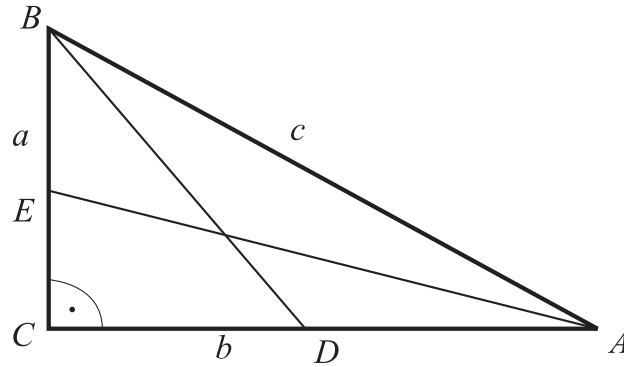
Bizonyítás:



$OAA_1\triangle \cong OBB_1\triangle$, mert egy oldal és a rajta lévő két szög páronként egyenlő, ezért $OA_1 = y$. Pithagorasz-tétel szerint $x^2 + y^2 = a^2$, ami valóban állandó, és nem függ az egyenestől.

18. Számítsuk ki a derékszögű háromszög oldalait, ha a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza $\sqrt{15}$ illetve $\frac{\sqrt{73}}{2}$.

Megoldás:



Az ábrán a hagyományos betűzést követtük és feltesszük, hogy $a \leq b$.

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételét az $ACE\triangle$ és $BCD\triangle$ háromszögekre:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{73}{4};$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = 13.$$

A két egyenlet négyszeresét összeadva következőhöz jutunk:

$$4(a^2 + b^2) = 100 \quad \implies \quad a^2 + b^2 = 25 \quad (1)$$

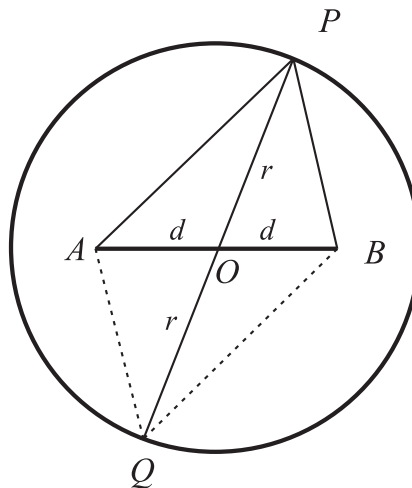
Ha pedig a két négyvel beszorzott egyenletet kivonjuk egymásból, akkor a következőt kapjuk:

$$b^2 - a^2 = 7 \quad (2)$$

(1) és (2) összeadásával $2b^2 = 32$, $b^2 = 16$; $b = 4$; $a = 3$ majd visszahelyettesítéssel $c = 5$.

19. Az $AB = 2d$ szakasz középpontja körül rajzoljunk egy r sugarú kört. Bizonyítsuk be, hogy a kör tetszőleges P pontjára $AP^2 + BP^2$ állandó.

Megoldás:



Ha az $APB\triangle$ háromszöget tükrözzük az O pontra, ezért az $APBQ$ paralelogramma. Ismert tétel, hogy a paralelogramma átlóinak a négyzetösszege egyenlő az oldalak négy-

zetösszegével:

$$AB^2 + PQ^2 = 2(AP^2 + BP^2)$$

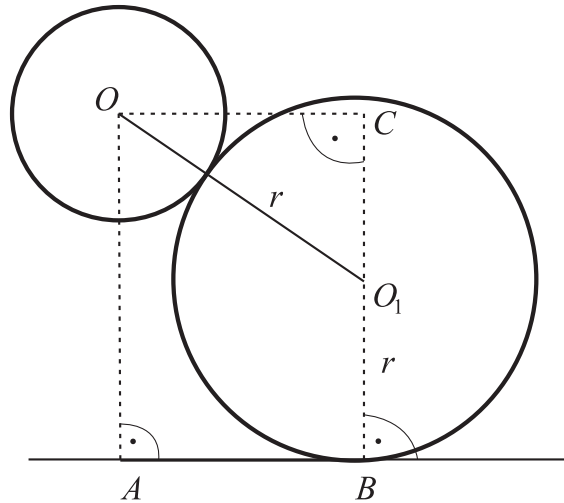
$$(2d)^2 + (2r)^2 = 2(AP^2 + BP^2)$$

$$4(d^2 + r^2) = 2(AP^2 + BP^2) \quad \text{ahonnan}$$

$$(AP^2 + BP^2) = 2(d^2 + r^2), \text{ ami állandó.}$$

20. A 2 egység sugarú kör középpontja 6 egységnyi távolságra van egy egyenestől. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely a kört és az egyenest is érinti és középpontja 4 egységre van a 2 egységnyi sugarú kör középpontjából az egyenesre bocsátott merőlegetől.

Megoldás:



Pitagorasz-tételét alkalmazzuk az $OCO_1\Delta$ -re:

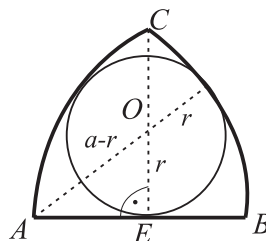
$$(r + 2)^2 = (6 - r)^2 + 4^2;$$

$$r^2 + 4r + 4 = 36 - 12r + r^2 + 16;$$

$$12r = 48; \quad r = 3.$$

21. Az a hosszúságú szakasz végpontjai körül, a szakasz tartóegyenesének egyik félsíkjában rajzoljuk meg az a sugarú köríveket. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely a szakaszt és a két körívet is érinti.

Megoldás:



Az ábrán $AB = a$. Pitagorasz-tételét alkalmazva:

$$(a - r)^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

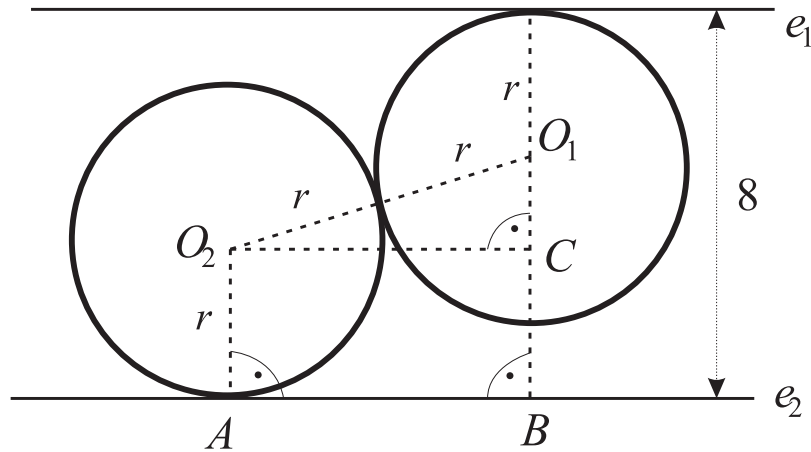
$$a^2 - 2ar + r^2 = r^2 + \frac{a^2}{4};$$

$$2ar = \frac{3a^2}{4};$$

$$r = \frac{3a}{8}.$$

22. Két párhuzamos egyenes távolsága 8 egység. Két egyenlő sugarú, egymást érintő kör úgy helyezkedik el a két egyenes között, hogy egyik-egyik a párhuzamosok egyikét is érinti. A körök középpontjából a párhuzamosokra húzott merőleges egyenesek egymástól való távolsága 3 egység. Mekkora az érintő körök sugara?

Megoldás:



Az ábráról leolvasható, hogy $CO_1 = 8 - 2r$, az adatokból pedig $AB = CO_2 = 3$.

Alkalmazzuk Pitagorasz-tételét a $CO_1O_2\triangle$ háromszögre:

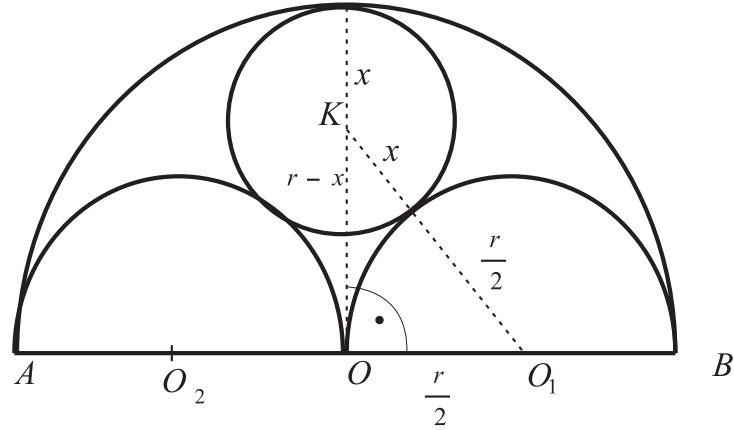
$$(2r)^2 = (8 - 2r)^2 + 3^2;$$

$$4r^2 = 64 - 32r + 4r^2 + 9;$$

$$32r = 73, \quad r = \frac{73}{32}.$$

23. Az r sugarú félkörben a határoló sugarak fölé befelé félköröket rajzolunk. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely mindhárom félkört érinti.

Megoldás:



A Pitagorsz-tételt alkalmazzuk az $OO_1K\triangle$ háromszögre:

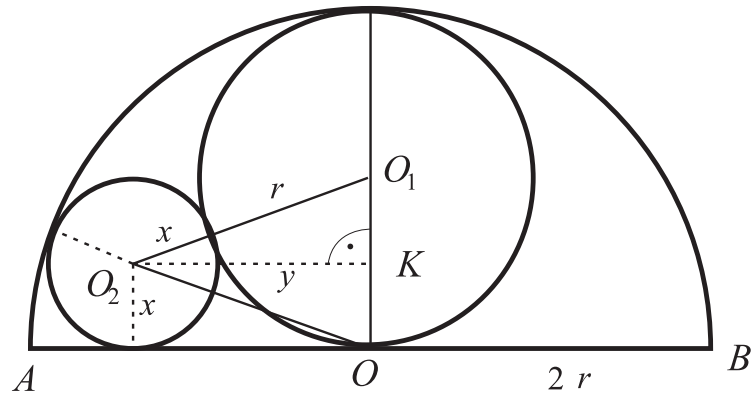
$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 = (r - x)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2;$$

$$x^2 + rx + \frac{r^2}{4} = r^2 - 2rx + x^2 + \frac{r^2}{4};$$

$$3xr = r^2, \quad x = \frac{r}{3}.$$

24. Az $AB = 4r$ átmérőjű félkörbe szerkesszünk egy r sugarú érintőkört, amely AB -t is érinti. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely a félkört és átmérőjét, valamint a beírt érintőkört is érinti.

Megoldás:



Felhasználva az adatokat és az ábra jelöléseit: $OK = x$; $OO_2 = 2r - x$, $KO_1 = r - x$. Ezeket felhasználva írjuk fel Pitagorasz-tételét az $O_1O_2K\triangle$ és $OO_2K\triangle$ derékszögű háromszögekre:

$$y^2 = (r + x)^2 - (r - x)^2,$$

$$y^2 = (2r - x)^2 - x^2;$$

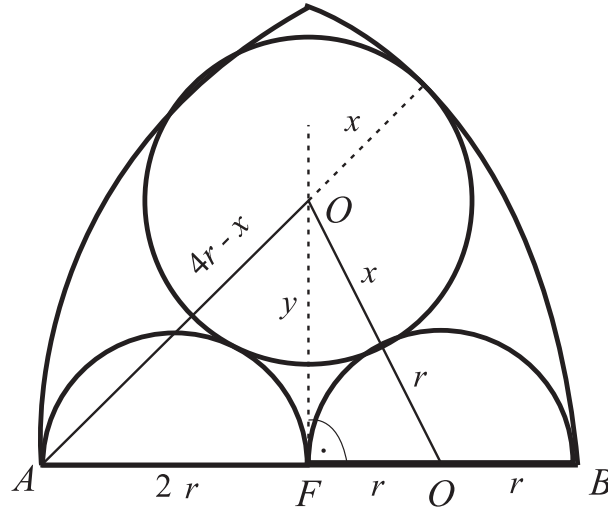
$$(r + x)^2 - (r - x)^2 = (2r - x)^2 - x^2;$$

$$2r \cdot 2x = 2r \cdot (2r - 2x)$$

$$2x = 2r - 2x, \quad 4x = 2r, \quad x = \frac{r}{2}.$$

25. Az $AB = 4r$ távolság végpontjai körül AB egyenesének egyik félsíkjában rajzoljunk AB sugarú köríveket. Az AB szakasz felére, az alábbi körívvel azonos oldalra rajzoljunk félköröket. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely a félköröket és a köríveket is érinti.

Megoldás:



A rajzon látható két derékszögű háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz-tételét:

$$y^2 = (4r - x)^2 - (2r)^2,$$

$$y^2 = (r + x)^2 - r^2;$$

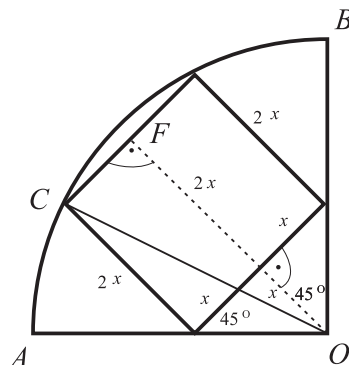
$$(4r - x)^2 - (2r)^2 = (r + x)^2 - r^2;$$

$$16r^2 - 8rx + r^2 - 4r^2 = r^2 + 2rx + x^2 - r^2;$$

$$12r^2 = 10rx; \quad x = \frac{6r}{5}.$$

26. Egy r sugarú körbe írt négyzet két csúcsa a köríven, a másik kettő pedig a határoló sugarakon van. Határozzuk meg a négyzet oldalát.

Megoldás:



Tekintsük az ábra jelöléseit és alkalmazzuk Pitagorasz-tételét az OFC háromszögre:

$$(3x)^2 + x^2 = r^2$$

$$10x^2 = r^2$$

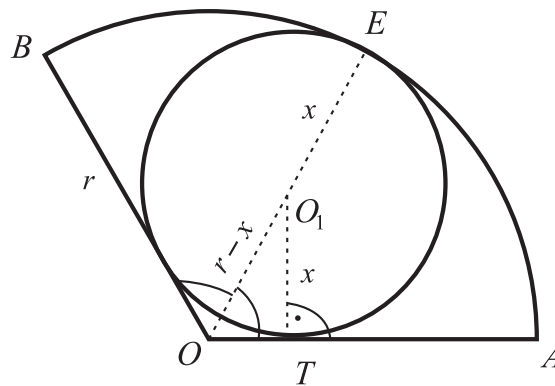
$$x = \frac{r}{\sqrt{10}} = \frac{r\sqrt{10}}{2 \cdot 5}.$$

A négyzet oldala: $a = 2x = \frac{r\sqrt{10}}{5}.$

27. Az r sugarú, 120° -os középpontú szögű körcikkbe írjunk olyan érintőkört, amely érinti a sugarakat és a körívet. Számítsuk ki az érintőkör sugarát.

Megoldás:

Megoldás:



Kövessük az ábra jelöléseit. Az $AOB\angle = 120^\circ$, az OE szögfelező, ezért a $TOO_1\angle = 60^\circ$, ezért a $TOO_1\triangle$ "félszabályos" háromszög, ezért $OT = \frac{r-x}{2}$.

Alkalmazzuk a jelzett háromszögre Pitagorasz-tételét:

$$(r-x)^2 = x^2 + \left(\frac{r-x}{2}\right)^2,$$

$$(r-x)^2 = x^2 + \frac{r^2 - 2rx + x^2}{4},$$

$$3(r-x)^2 = 4x^2,$$

$$\sqrt{3}(r-x) = 2x,$$

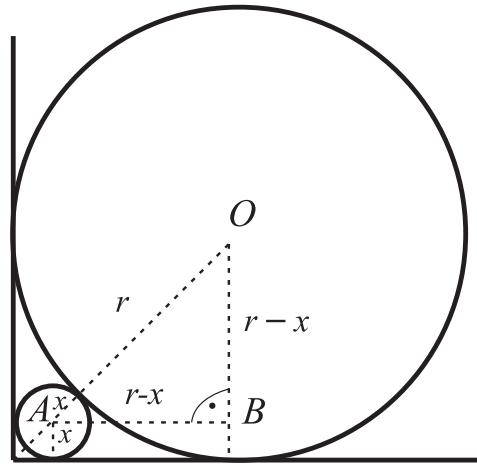
$$r\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})x,$$

$$x = \frac{r\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = r\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}).$$

A keresett kör sugara: $r\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \approx 0,46r$.

28. Az egységnyi sugarú kör érinti egy derékszög szarait. Határozzuk meg azon körök sugarait, amelyek a szögszarakat és az egységekört is érintik.

Megoldás:



Kövessük az ábra jelöléseit és alkalmazzuk Pithagorasz-tételét az $ABO\triangle$ háromszögre:

$$(r-x)^2 + (r-x)^2 = (r+x)^2$$

$$\sqrt{2}|r-x| = r+x$$

$$\sqrt{2}(1-x) = 1+x \quad \text{vagy} \quad \sqrt{2}(x-1) = 1+x$$

$$x(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1, \quad \text{vagy} \quad x(\sqrt{2}-1) = 1+\sqrt{2}$$

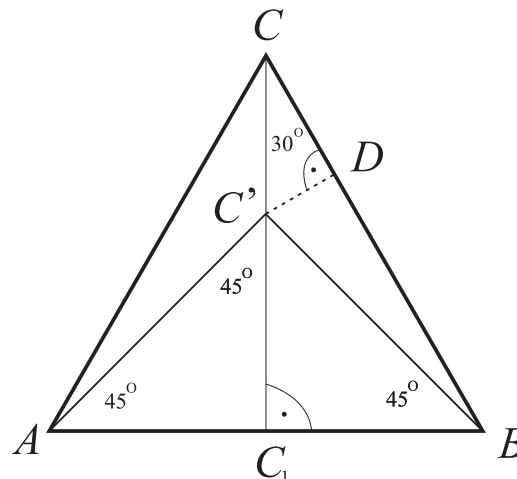
$$x_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = 3-2\sqrt{2} (\approx 0,17) \text{ vagy}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} (\approx 5,83)$$

A nagyobb kört nem tüntettük fel az ábrán.

29. Az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében vegyünk fel egy C' pontot úgy, hogy ABC' háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög legyen. Milyen távol van a C' pont a C – től és a BC oldaltól, ha $BC = 10$.

Megoldás:

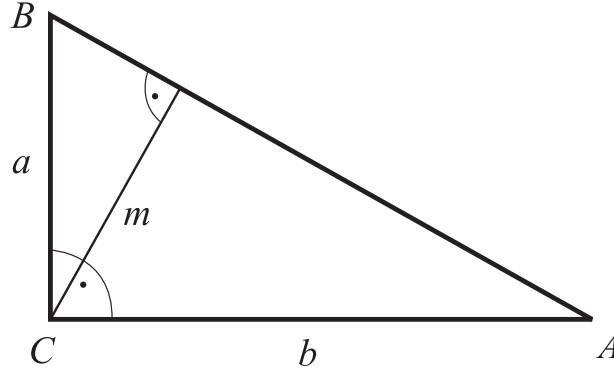


Legyen $AB = a = 10$, ekkor $C_1C' = \frac{a}{2}$, $CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, így $CC' = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$,
 $CC' = 5(\sqrt{3} - 1) (\approx 3,66)$; $C'D = \frac{1}{2} \cdot CC'$, mert $C'D$ - vel szemközti szög 30° -os.

$$C'D = \frac{a}{4}(\sqrt{3} - 1) = \frac{5}{4}(\sqrt{3} - 1) (\approx 1,83).$$

30. Egy derékszögű háromszögben az átfogó a hozzá tartozó magasság $2\sqrt{2}$ - szöröse. Határozzuk meg a befogók arányát.

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit, ahol $0 < a < b$

A kétszeres területet kétféle módon felírva, figyelembe véve a feltételt is, és egyenlővé téve a következőt kapjuk:

$$ab = 2m^2\sqrt{2}$$

$$m^2 = \frac{ab}{2\sqrt{2}}.$$

Pitagorasz-tételét alkalmazva:

$$a^2 + b^2 = (2m\sqrt{2})^2 = 8m^2 = \frac{4ab}{\sqrt{2}} = 2ab\sqrt{2}, \text{ ahonnan:}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\sqrt{2} = 0, \text{ ahol legyen } \lambda = \frac{a}{b} < 1.$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2\sqrt{2} = 0,$$

$$\lambda^2 - (2\sqrt{2})\lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda = \sqrt{2} \pm \sqrt{2-1} = \sqrt{2} \pm 1.$$

A mondottak miatt $\lambda < 1$, azaz $\lambda = \sqrt{2} - 1$.

31. Egy szabályos tetraéder minden oldala a . Számítsuk ki két kitérő éle felezőpontjának távolságát.

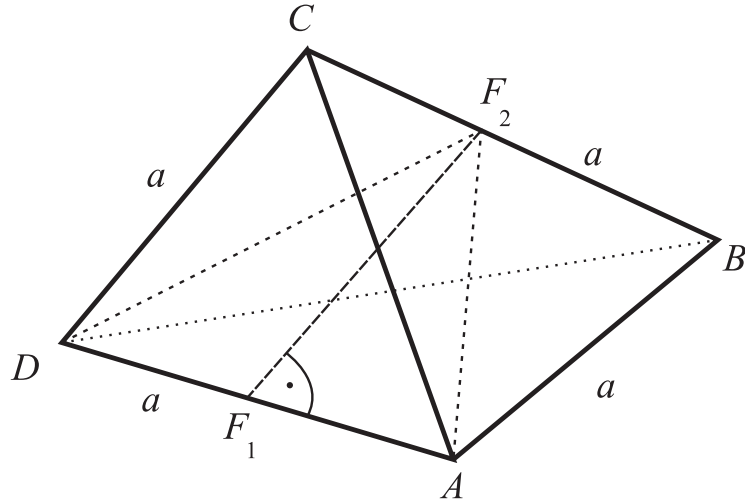
Megoldás:

Mivel a szabályos tetraéder lapjait szabályos háromszögek alkotják, ezért

$$AF_2 = CF_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ ahol } a \text{ jelöli a szabályos háromszög oldalát.}$$

Mivel $ACF_2\Delta$ egyenlő szárú, ezért $F_1F_2 \perp AC$.

Pitagorasz-tételét alkalmazva:

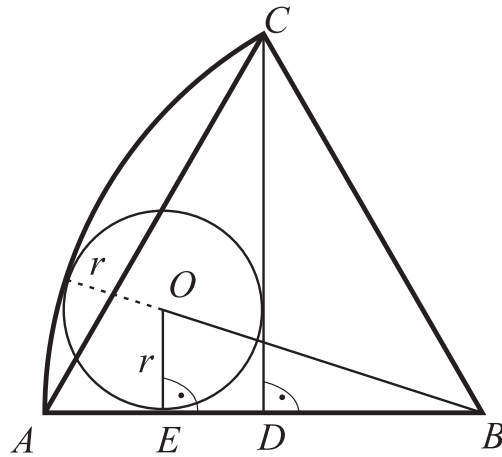


$$F_1F_2^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 (3 - 1) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 2,$$

$$F_1F_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

32. Az ABC egység oldalú szabályos háromszög B csúcsa körül rajzoljunk egységgörte és húzzuk meg a CD magasságot. Mekkora annak a körnek a sugara, amely az AB oldalt, a CD magasságot és az AC körívet belülről érinti.

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit és vegyük figyelembe a következőket:

$$AB = BC = CA = 1; \quad OB = 1 - r; \quad ED = r; \quad BD = \frac{1}{2}.$$

A BOD derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt alkalmazva:

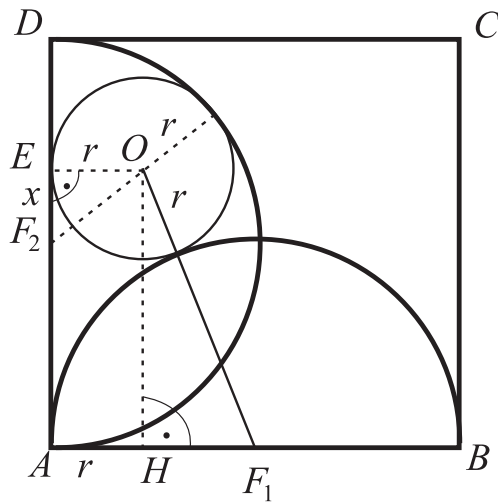
$$r^2 + \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 = (1 - r)^2,$$

$$r^2 + r^2 + r + \frac{1}{4} = 1 - 2r + r^2,$$

$$r^2 + 3r - \frac{3}{4} = 0, \quad \text{ahol} \quad 0 < r < \frac{1}{2},$$

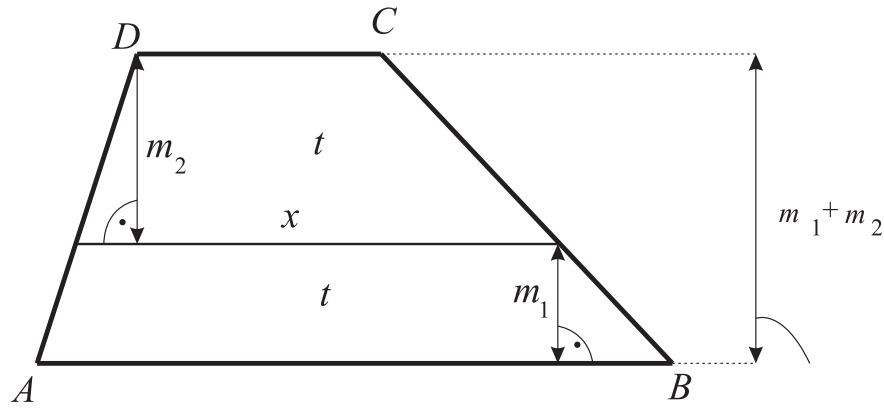
$$r = \frac{2\sqrt{3}-3}{2} (\approx 0,23).$$

- Megoldás:


$$(1+r)^2 = (1-r)^2 + (1+x)^2.$$
$$r = \frac{4}{9}.$$

- 19

Megoldás:



Felírjuk az eredeti trapéz és a másik két trapéz területét. Használjuk az ábra jelöléseit.

$$2t = \frac{a+c}{2} (m_1 + m_2);$$

$$t = \frac{a+c}{4} (m_1 + m_2); \quad (1)$$

$$t = \frac{a+x}{2} \cdot m_1; \quad (2)$$

$$t = \frac{c+x}{2} \cdot m_2; \quad (3)$$

(1) és (2) alapján:

$$\frac{a+x}{2} \cdot m_1 = \frac{c+x}{2} \cdot m_2;$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a+x}{c+x} \quad (4)$$

Az (1) és (2) alapján:

$$\frac{a+c}{4} (m_1 + m_2) = \frac{a+x}{2} \cdot m_1$$

$$(a+c) \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = 2a + 2x;$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{2a+2x}{a+c} - 1;$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a+2x-c}{a+c} \quad (5)$$

(4) és (5) alapján:

$$\frac{a+x}{c+x} = \frac{a+2x-c}{a+c}$$

$$(a+x)(a+c) = (a+2x-c)(c+x)$$

$$a^2 + ax + ac + cx = ac + 2cx + ax + 2x^2 - c^2 - cx$$

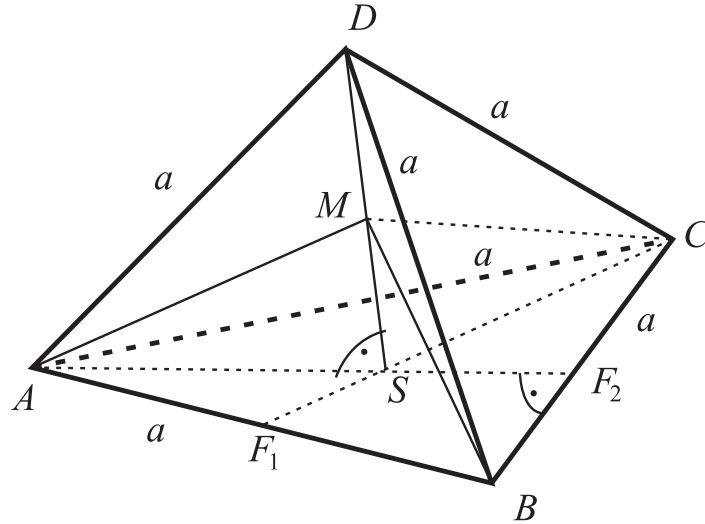
$$2x^2 = a^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$$

Érdemes megfigyelni, hogy az alapokkal párhuzamos, a trapéz területét felező szakasz hossza csak a párhuzamos oldalaktól függ, a magasságtól független. Máshogyan kifejezve: az x szakasz a két párhuzamos oldal négyzetes közepe.

35. Az $ABCD$ szabályos tetraéder minden éle a . A D csúsból induló magasság felezőpontja M . Bizonyítsuk be, hogy $AM \perp BM \perp CM$.

1. Megoldás:



Kövessük az ábra jelöléseit. A magasság talppontja az ABC_{Δ} háromszög S súlypontja,

$$\text{ezért } AS = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad AF_2 = \frac{a}{2}.$$

$$DS^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$DS = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$AM^2 = BM^2 = AS^2 + \left(\frac{DS}{2}\right)^2$$

$$AM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{6a^2}{36} = \frac{12a^2 + 6a^2}{36} = \frac{a^2}{2}.$$

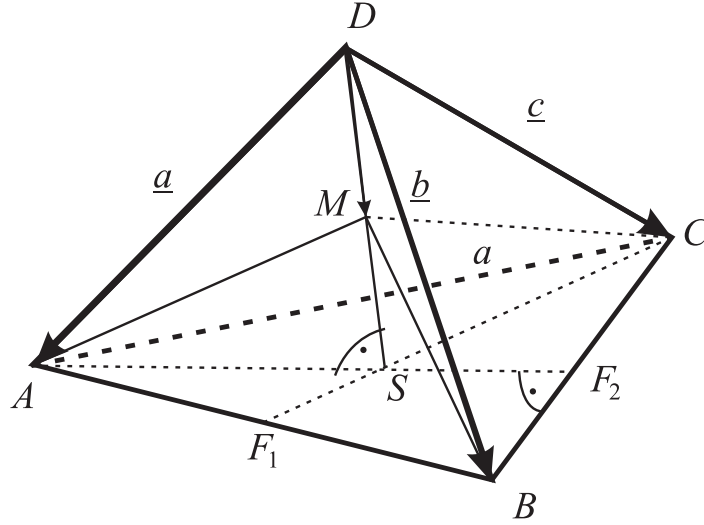
$$AM^2 + BM^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2 = AB^2$$

Utóbbi egyenlőség a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt azt jelenti, hogy az ABM_{Δ} háromszög derékszögű, azaz $AM \perp BM$.

Mivel az $ABM_{\Delta} \cong BCM_{\Delta} \cong ACM_{\Delta}$ ezért AM , BM , CM egymásra merőlegesek.

2. Megoldás:

Kínálja magát a vektoros megoldás!



Használjuk az ábra jelöléseit és legyenek a szabályos tetraéder élei egységnyi hosszúak. Vezessük be a $\overrightarrow{DA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{DB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{c}$ vektorokat, amelyek egységnyi hosszúak és közbezárt szögük 60° .

Mivel S az ABC_Δ háromszög súlypontja, ezért

$$\overrightarrow{DS} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}, \quad \overrightarrow{DM} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{6}.$$

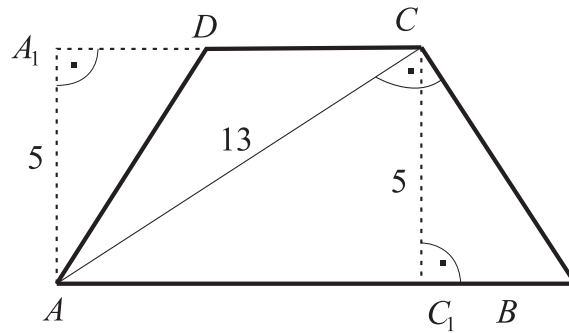
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \left(\underline{a} - \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{6} \right) \left(\underline{b} - \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{36} (5\underline{a} - \underline{b} - \underline{c}) (5\underline{b} - \underline{a} - \underline{c}) = \\ &= \frac{1}{36} (25\underline{ab} - 5\underline{a}^2 - 5\underline{ac} - 5\underline{b}^2 + \underline{ab} + \underline{bc} - 5\underline{bc} + \underline{ac} + \underline{c}^2) = \\ &= \frac{1}{36} \left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2} - 5 - \frac{5}{2} - 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{36} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy $MA \perp MB$. Tekintettel, hogy ezek a szakaszok nincsenek kitüntetve, ezért a többire is igaz.

36. A szimmetrikus trapéz 13 egység hosszú átlója merőleges a szárra, a trapéz magassága 5 egység. Mekkora a területe?

Megoldás:

Használjuk az ábra jelöléseit.



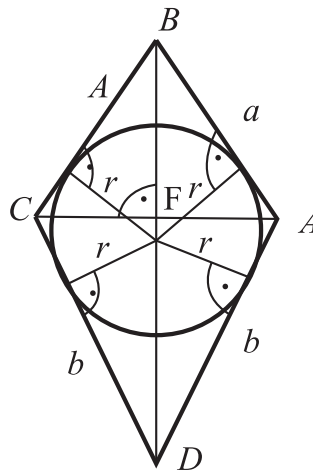
$BCC_1\Delta \cong AA_1D\Delta$, mert egy oldal és a rajta lévő két szög egyenlő. Az említett két háromszög területe is egyenlő, ezért a trapéz területe egyenlő az AC_1CA_1 téglalap területével.

Pitagorasz-tétele szerint $AC_1^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, így $AC_1 = 12$.

A trapéz területe: $t = 5 \cdot 12 = 60$ terület egység.

37. Egy deltoid átlói $2 - 2$, illetve 3 és 4 egységnyi darabokra osztják egymást. Mekkora a beírható kör sugara?

Megoldás:



Az adatokból adódóan $AF = CF = 3$, $BF = 3$, $DF = 4$, így Pitagorasz-tételt alkalmazva $a = \sqrt{13}$, $b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Számítsuk ki a deltoid területét kétféle módon!

$$t = \left(\frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} \right) \cdot 2 = (a + b)r \quad \text{másrészt:}$$

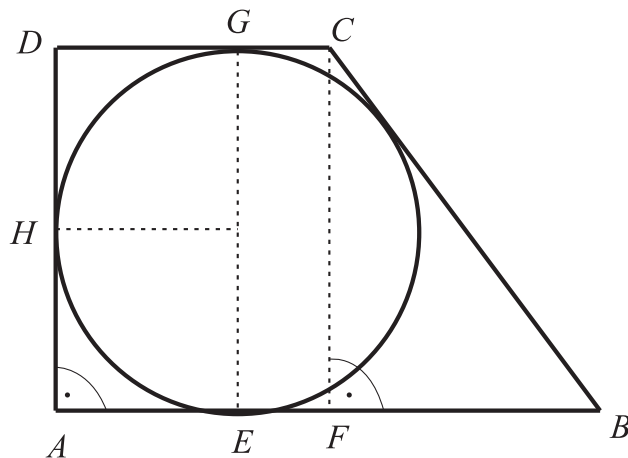
$$t = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14, \text{ ezért:}$$

$$(a + b)r = 14, \quad r = \frac{14}{a + b} = \frac{14}{\sqrt{20} + \sqrt{13}} = \frac{14(\sqrt{20} - \sqrt{13})}{20 - 13}$$

$$r = 2(\sqrt{20} - \sqrt{13}) (\approx 1,73).$$

40. Egy 6 egység sugarú kör köré olyan derékszögű trapézzt írunk, amelynek legkisebb oldala 9 egység. Számítsuk ki a trapéz területét.

Megoldás:



Az ábra jelölései szerint az adatok: $AE = AH = HD = DG = 6$, $CG = EF = 3$, $CF = 12$, vezessük be a következő jelölést: $EB = x$, ekkor $BF = x - 3$.

Pitagorsz-tételt alkalmazva:

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12^2$$

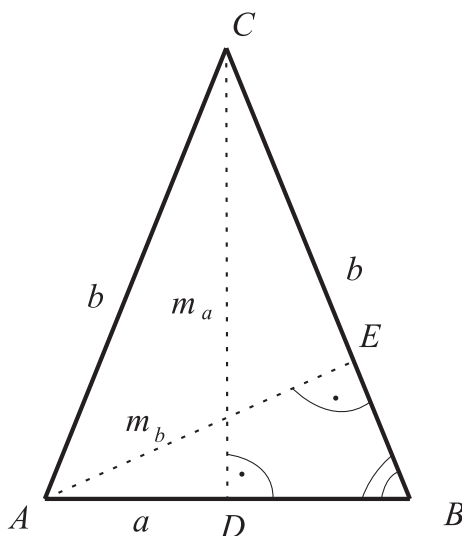
$$2x \cdot 6 = 12^2, \quad x = 12.$$

$$a = x + 6 = 18, \quad c = 6 + 3 = 9 \text{ (adott)}$$

A trapéz területe: $t = \frac{18 + 9}{2} \cdot 12 = 27 \cdot 6 = 162$ terület egység.

41. Egy egyenlő szárú háromszög alapja a , szára b egység. Mekkora a szárakhoz tartozó magassága?

Megoldás:



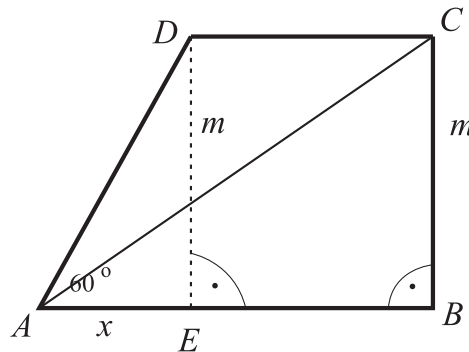
Az $ABE_{\triangle} \sim CDE_{\triangle}$, mert két-két megfelelő szögük egyenlő, ezért az ábra jelöléseivel felírható, hogy

$$\frac{m_a}{m_b} = \frac{b}{a}, \quad m_b = \frac{a}{b} \cdot m_a$$

Másrészt Pitagorasz-tétel szerint $m_a^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$, $m_a = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, így

$$m_b = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

42. Az $ABCD$ trapéz AB alapján az A csúcsnál 60° -os szög van, a B -nél pedig derékszög. A trapéz AB -vel párhuzamos oldala 4, a magassága pedig $2\sqrt{3}$. Határozza meg a trapéz hosszabbik átlóját, kerületét és területét.
Megoldás:



Felhasználva az ábra jelöléseit $VD = 4$, $m = 2\sqrt{3}$. A "fél-szabályos" AED_Δ háromszög tulajdonsága miatt $AD = 2x$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt erre a háromszögre:

$$(2x)^2 - x^2 = (2\sqrt{3})^2, \quad 3x^2 = 12, \quad x^2 = 4, \quad x = 2.$$

$$k = 6 + 4 + 4 + 2\sqrt{3} = 14 + 2\sqrt{3} (\approx 17,46); \quad t = 10\sqrt{3} (\approx 17,32).$$

$$AC^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 = 36 + 12 = 48;$$

$$AC = 4\sqrt{3} (\approx 6,93)$$

43. Egy háromszög oldalai 10; 10; 12 egység. Számítsuk ki a háromszögbe írható, illetve a köré írható körének sugarát.

Megoldás:

A háromszög területének a kiszámítására használjuk a Heron-képletet:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48.$$

Jelölje a beírt kör sugarát r , a köré írt körét R és alkalmazzuk az ismert $T = r \cdot s$ és

$$R = \frac{abc}{4T} \text{ képleteket: } r = \frac{t}{s} = \frac{48}{16} = 3; \quad R = \frac{1200}{4 \cdot 48} = \frac{25}{4} = 6,25.$$

44. Egy derékszögű háromszög befogói 8 és 15 egység.
a) Mekkora a háromszög köréírt kör sugara?
b) Mekkora a háromszögbe írt kör sugara?

Megoldás:

Jelölje a háromszög befogóit a és b az átfogót pedig c . A háromszög köré írható kör sugara az átfogó hosszának a fele, amit Pitagorasz-tétellel kiszámíthatunk:

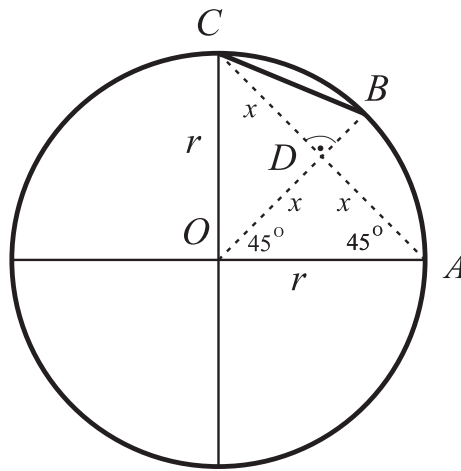
$$c^2 = 8^2 + 15^2 = 289; \quad c = 17; \quad R = 8,5.$$

A beírt kör sugarát az $r = \frac{t}{s}$ képlet alapján számoljuk:

$$r = \frac{8 \cdot 15}{2 \cdot 20} = 3.$$

45. Határozza meg az r sugarú körbe írt szabályos nyolcszög oldalának és területének pontos mértékét.

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit, melyen a szabályos nyolcszögnek csak egy oldalát rajzoltuk meg. Jelölje ezt az oldalt $a_8 = AB$. Alkalmazzuk Pitagorasz-tételét az OAD_{Δ} háromszögre, majd a BCD_{Δ} háromszögre:

$$2x^2 = r^2; \quad x = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2};$$

$$a_8^2 = x^2 + (r - x)^2 = r^2 - 2rx + 2x^2;$$

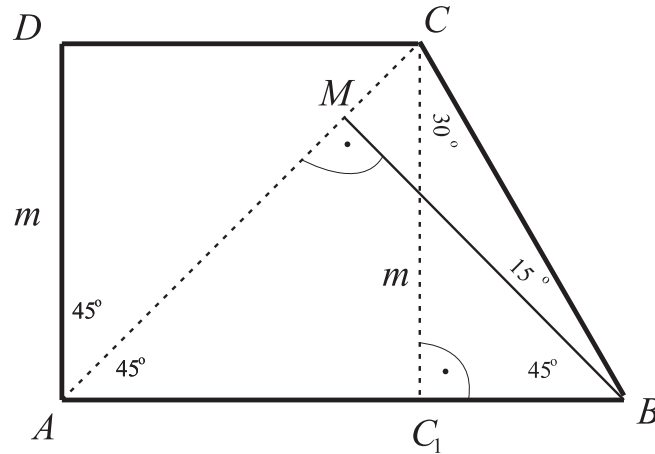
$$a_8^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{2} = r^2(2 - \sqrt{2});$$

$$a_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$T = 8 \cdot \frac{r \cdot x}{2} = 4rx = 4r \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2} = 2r^2\sqrt{2}.$$

46. Az $ABCD$ trapézban az A és a D csúsnál derékszög van. A trapéz párhuzamos oldalai közül a CD a rövidebb, és ez éppen egyenlő a trapéz magasságával. A B csúsból az AC átlóra bocsátott merőleges ezt az átlót M pontban metszi. A $CBM\angle = 15^\circ$, a BC oldal hossza 6 egység. Számítsuk ki a trapéz ismeretlen szögeit és területét.

Megoldás:



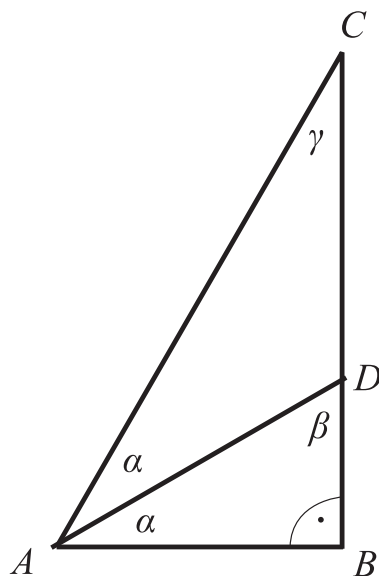
A feltevés szerint $AD = C$, ezért AC_1CD négyzet és így ABM_Δ egyenlő szárú és derékszögű. Ebből következik, hogy $ABN\angle = 45^\circ$. Mivel $CBM\angle = 15^\circ$, ezért $ABC\Delta = 60^\circ$. Így viszont a 30° -os szöggel szemközti BC_1 befogó fele a BC -nek, vagyis $BC_1 = 3$, ebből következik, hogy $m = 3\sqrt{3}$.

$$AB = 3\sqrt{3} + 3; \quad CD = 3\sqrt{3};$$

$$t = \frac{6\sqrt{3} + 3}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 27 + 4,5\sqrt{3} (\approx 34,79).$$

47. Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög szögfelezőjének hossza 10 egység. Ez a szögfelező a szemközti befogóval 60° -os szöget zár be. Számítsuk ki a háromszög hegyesszögeit és oldalait. Mekkora területi részekre bontja ez a szögfelező az adott háromszöget?

Megoldás:



A feltételből az adatok a következők:

$$AD = 10; \quad \beta = 60^\circ, \text{ ebből adódóan } \alpha = 30^\circ; \quad \beta = 30^\circ, \quad CD = 5, \quad AC = 5\sqrt{3}.$$

Mivel $\alpha = \beta$ ezért az ABD_Δ egyenlő szárú és így $BD = 10$, $BC = 10 + 5 = 15$.

Mivel $\beta = 30^\circ$ ezért $AB = 2 \cdot AC$ vagyis $AB = 10\sqrt{3}$.

$$t_{ACD} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2} (\approx 21,65) \text{ terület egység.}$$

$$t_{ABD} = 2 \cdot t_{ACD} = 25\sqrt{3} (\approx 43,30) \text{ terület egység.}$$

48. Egy derékszögű háromszög területe 100 terület egység, a háromszögbe írható kör sugara 4 egység. Mekkora a háromszög oldalai?

Megoldás: Jelölje a és b a derékszögű háromszög befogóit, az átfogót c , a beírt kör sugarát r . Feltehetjük, hogy $a \geq b$.

Ismert, hogy $c = a + b - 2r$, jelen esetben $c + 8 = a + b$, ebből adódóan:

$$c^2 + 16c + 64 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

Tekintettel arra, hogy a Pitagorasz-tétel értelmében $a^2 + b^2 = c^2$ és a háromszög területéből $2t = ab = 200$, a következő egyenlethez jutunk:

$$16c + 64 = 400; \quad 16c = 336; \quad c = 21.$$

A befogóknak két egyenletet kell kielégíteni:

$$a + b = 29 \text{ és } ab = 200.$$

A Viète-formulák alapján a és b a következő egyenlet gyökei:

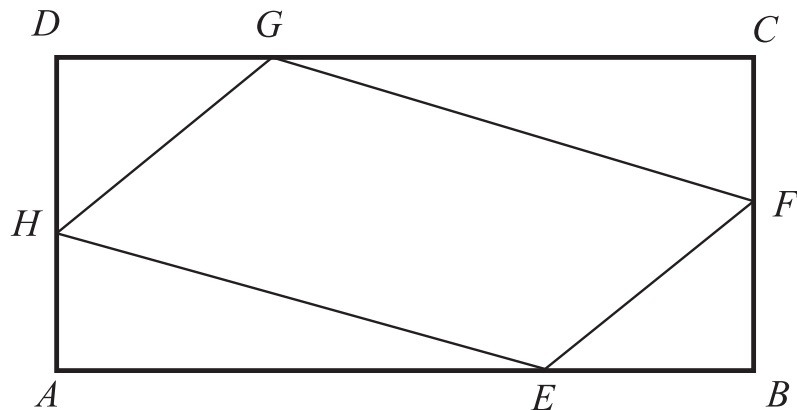
$$z^2 - 29z + 200 = 0;$$

$$z_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 800}}{2} = \frac{29 \pm \sqrt{41}}{2},$$

$$a = \frac{29 + \sqrt{41}}{2}, \quad b = \frac{29 - \sqrt{41}}{2}.$$

49. Egy téglalapba konvex négyszöget írunk. A téglalap kerületén végighaladva, a beírt négyszög csúcsai a téglalap oldalait rendre azonos arányban osztják. Mekkora ez az arány, ha a beírt négyszög területének és a téglalap területének az aránya $5 : 8$.

Megoldás:



Az ábra jelöléseit használva vezessük be a következő jelölést:

$$DG = EB = ka, \quad AE = CG = (1 - k)a, \quad AH = CF = kb, \quad BF = DH = (1 - k)b,$$

ahol $0 < k < 1$.

Mivel a levágott részek területösszege a téglalap területének $\frac{3}{8}$ - ad része, ezért felírható a következő egyenlet:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ka \cdot (1 - k) b = \frac{3}{8} \cdot ab$$

$$k(1 - k) = \frac{3}{16}$$

$$k^2 - k + \frac{3}{16} = 0$$

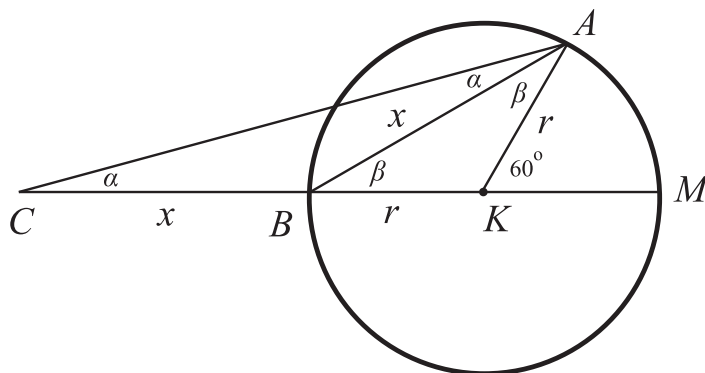
$$k_{1;2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}$$

$$k_1 = \frac{3}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{4}.$$

Az osztóarány: $1 : 3$.

50. Egy K középpontú kör AM ívéhez 60° - os középponti szög tartozik. Jelölje B az MK egyenesnek a körrel alkotott másik metszéspontját, C pedig az MK egyenesnek azt a pontját, amely a körön kívül úgy helyezkedik el, hogy $BC = BA$. Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit és területét.

Megoldás:



Az ábrán figyelembe vettük, hogy az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők. Az $AKM \angle$ az $ABK \triangle$ külső szöge, ezért $\beta = 60^\circ$. Hasonló alapon $\alpha = 15^\circ$.

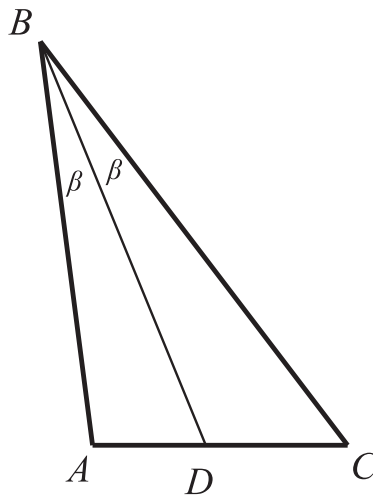
$$x = 2r \sin 60^\circ = r\sqrt{3}$$

$$t_{ABC} = \frac{x^2}{2} \sin 150^\circ = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^2}{4}$$

$$t_{ABC} = \frac{3r^2}{4}$$

51. Az ABC háromszögben $AB = 4$ egység, $BC = 6$ egység, a B csúcsnál lévő szög 30° . A B csúcsnál lévő szög szögfelezője az AC oldalt a D pontban metszi. Mekkora az ABD háromszög területe?

Megoldás:



Az adatok az ábra jelöléseivel a következők: $AB = 4$, $BC = 6$, $\beta = 15^\circ$.

$$\frac{t_{ABD}}{t_{BCD}} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

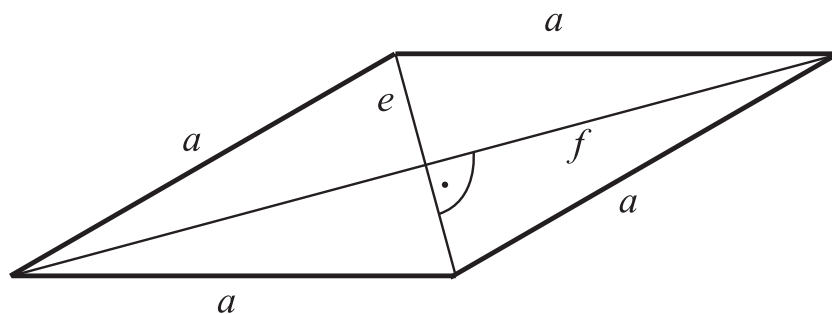
A területek arányának felírásánál felhasználtuk, hogy a két háromszög AD illetve DC oldalához tartozó magasságvonalak megegyeznek, másrészt a szögfelező tételt.

$$t_{ABD} = \frac{2}{5} \cdot t_{ABC} = \frac{4 \cdot 6}{2} \sin 30^\circ = 6 \text{ terület egység.}$$

$$t_{ABD} = \frac{2}{5} \cdot 6 = 2,4 \text{ területe egység.}$$

52. Egy rombusz egyik szöge 150° . Bizonyítsuk be, hogy a rombusz oldala az átlók mértani közepe.

Megoldás:



Írjuk fel a rombusz területét kétféle módon:

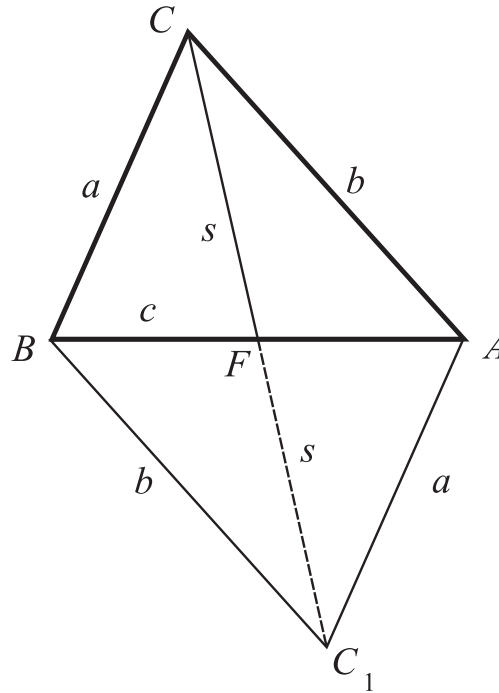
$$\frac{e \cdot f}{2} = a^2 \sin 30^\circ$$

$$e \cdot f = a^2$$

$$a = \sqrt{e \cdot f}, \text{ amit bizonyítani kellett.}$$

53. Adott a háromszög két oldala: $AC = 13$, $BC = 11$ egység és a C –ből induló súlyvonala $CF = 10$ egység. Mekkora a háromszög harmadik oldala és a területe?

Megoldás:



Az adatok az ábra jelölései szerint a következők: $a = 11$, $b = 13$, $s = 10$ egység.

Az ABC háromszöget az AB oldal F felezőpontjára tükrözve az $ACBC_1$ paralelogrammához jutunk. Ismert, hogy a paralelogramma oldalainak a négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, ezért:

$$2(a^2 + b^2) = c^2 + (2s)^2$$

$$2(11^2 + 13^2) = c^2 + 20^2$$

$$580 = c^2 + 400, \quad c^2 = 180, \quad c = 6\sqrt{5} \approx 13,43 \text{ egység.}$$

A háromszög területét kiszámolhatnánk a Heron-képlettel, de ha a pontos értéket akarjuk meghatározni, akkor például kiszámoljuk a C csúsnál levő szöget koszinusz tétellel, amit jelöljön γ .

$$180 = 11^2 + 13^2 - 2 \cdot 11 \cdot 13 \cos \gamma$$

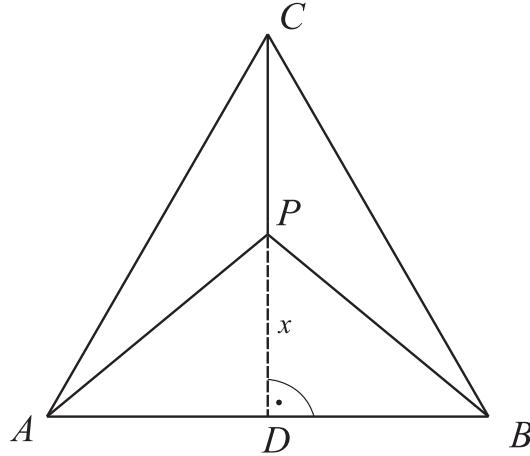
$$286 \cos \gamma = 110, \quad \cos \gamma = \frac{110}{286} = \frac{5}{13}$$

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{169 - 25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \frac{12}{13} = 66 \text{ területegység.}$$

54. Az ABC szabályos háromszög belsejében egy P pont úgy helyezkedik el, hogy $AP = BP = 2$ egység és $PC = 1$ egység. Mekkora a háromszög területe?

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit, ahol $AB = BC = CA = a$, $PA = PB = 2$, $PC = 1$ egység. Alkalmazzuk Pitagorasz-tételét:

$$a^2 = (1 + x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$(1 + x)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$1 + x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2^2, \quad \frac{3a^2}{4} - a\sqrt{3} + 1 + \frac{a^2}{4} = 4,$$

$$a^2 - a\sqrt{3} - 3 = 0, \quad a = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+12}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{15}}{2}$$

Mivel $a > 0$ ezért $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

$$T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{16}(\sqrt{5} + 1)^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{16}(6 + 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{8}(3 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{3} (\approx 4,40)$$

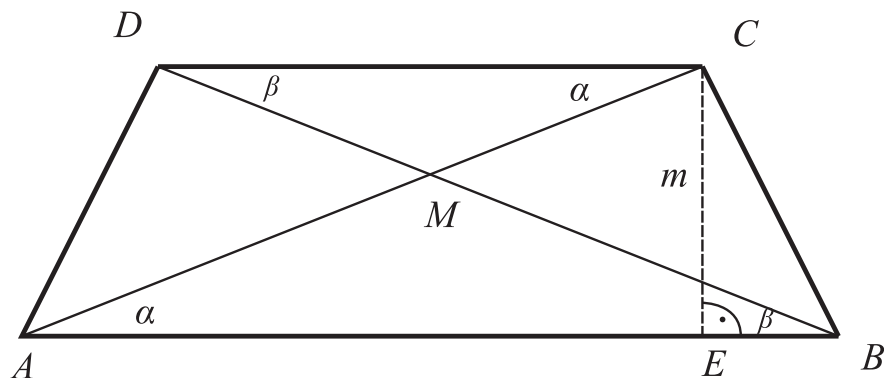
55. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 12 és 8 egység, szárai 4 egység hosszúak. Mekkora a trapéz területe? Milyen messze van az átlók metszéspontja a 8 egységnyi oldal végpontjaitól?

Megoldás:

Kövessük az ábra jelöléseit az adatokkal: $AB = 12$; $CD = 8$; $AD = BC = 4$.

$EB = \frac{AB - DC}{2} = \frac{12 - 8}{2} = 2$, ami miatt a BCE_{Δ} "fél szabályos" háromszög, ezért a magasság: $m = 2\sqrt{3}$, így a trapéz területe:

$$T = \frac{12 + 8}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3} (\approx 34,64)$$



$CDM_{\Delta} \sim ABM_{\Delta}$, mert megfelelő szögei egyenlők, ezért

$$\frac{CM}{MA} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$CM = \frac{2}{5}AC = \frac{2}{5}4\sqrt{7} = \frac{8\sqrt{7}}{5} \quad (\approx 4,23)$$

56. Egy derékszögű háromszög átfogója 12,5 egység, az egyik befogó 2,5 egységgel nagyobb a másiknál. Mekkora a befogók és a háromszög beírható körének sugara?

Megoldás:

Jelölje a a derékszögű háromszög egyik befogóját. Az adatok szerint ekkor a másik befogó $a + 2,5$, az átfogó pedig 12,5 egység. Alkalmazzuk Pitagorasz-tételét:

$$a + (a + 2,5)^2 = 12,5^2$$

$$2a^2 + 5a - 150 = 0$$

$$a = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1200}}{4} = \frac{-5 \pm 35}{4}$$

$$a_1 = \frac{-5 + 35}{4} = \frac{30}{4} = 7,5 \quad (a_2 = -10)$$

a befogók 7,5 és 10 egység hosszúak.

A háromszög területe: $t = \frac{7,5 \cdot 10}{2} = 37,5$ terület egység.

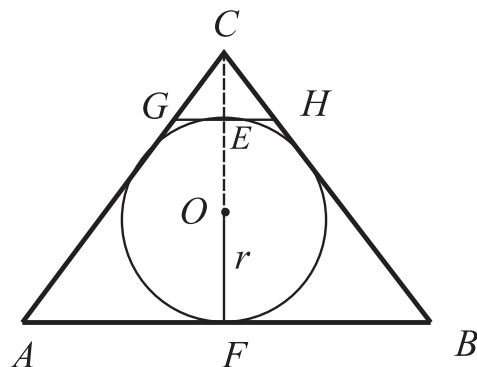
Ismeretes, hogy $t = r \cdot s$, ahol r jelöli a beírt kör sugarát s pedig a háromszög kerületének a felét (félkerület), ezért $r = \frac{37,5}{15} = 2,5$ egység.

Megjegyzés: aki ismeri a derékszögű háromszög esetében használható, ismert $r = \frac{a + b - c}{2}$ képletet az rövidebben célba ér.

57. Az egyenlő szárú háromszög alapja 12 egység, a hozzá tartozó magasság 8 egység. A beírható körének az alappal párhuzamos érintőjéből mekkora darabot vágnak ki a szárak?

Megoldás:

A $CF = 8$, a Pitagorasz-tételét felhasználva $AC = BC = 10$



Az adatokból következik, hogy $k = 32$ $s = 16$; $t = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$, így a beírt kör sugara:

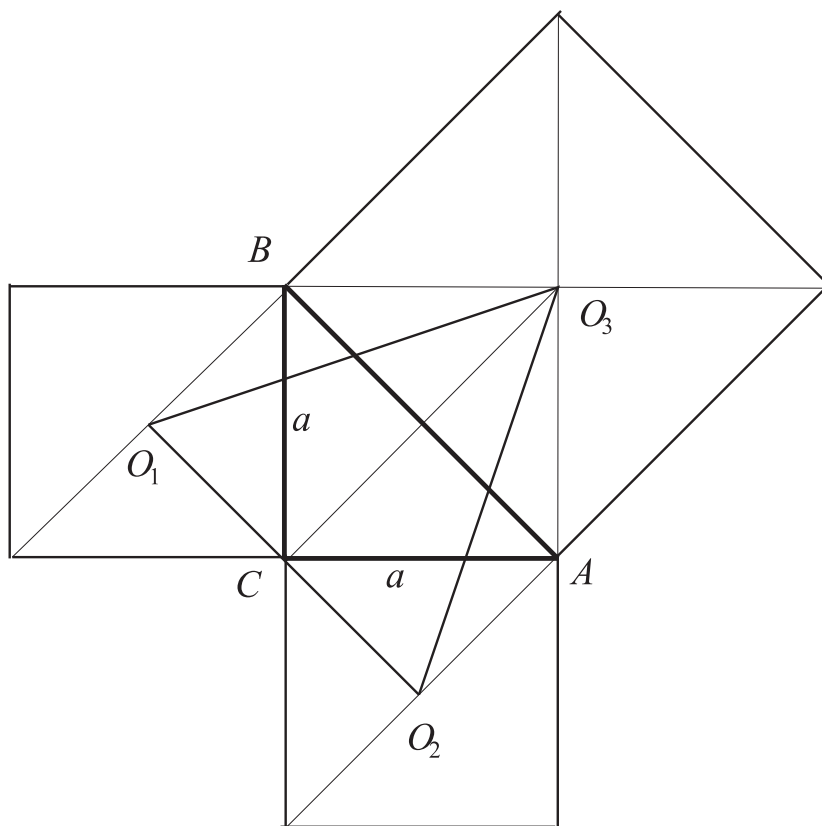
$$r = \frac{t}{s} = \frac{48}{16} = 3.$$

$EF = 6$; $CE = 2$; $CGH_{\Delta} \sim ABC_{\Delta}$, mert szögei páronként egyenlők, ezért

$$\frac{GH}{AB} = \frac{CE}{CF}, \quad GH = \frac{12 \cdot 2}{8} = 3.$$

58. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójának hossza a egység. Az oldalak mindegyikére kifelé négyzeteket szerkesztünk. Ezek középpontjai O_1, O_2, O_3 . Számítsuk ki az O_1, O_2, O_3 háromszög területét és területét.

Megoldás:



Az AO_3BC négyszög egy a oldalú négyzet. Bebizonyítjuk, hogy $T_{O_1O_2O_3} = T_{AO_3BC} = a^2$.
 $T_{AO_3C} = T_{CO_2O_3}$ illetve $T_{BO_3C} = T_{CO_1O_3}$, mert egy oldal és a hozzá tartozó magasság közös. A két egyenlőséget összeadva éppen a bizonyítandó állítás adódik.

Pitagorasz-tételét alkalmazva:

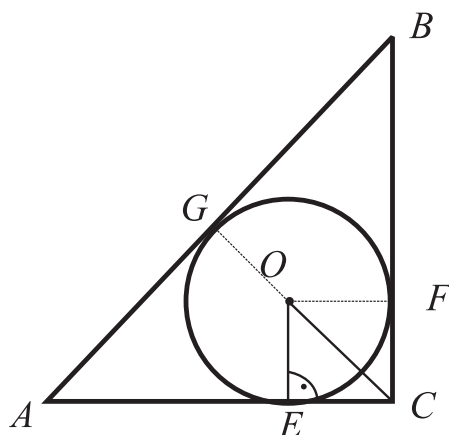
$$O_1O_3^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{10a^2}{4}$$

$$O_1O_3 = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Az $O_1O_2O_3\triangle$ háromszög kerülete: $k = a\sqrt{2} + a\sqrt{10} = a\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)$ ($\approx 4,58a$).

59. Egy háromszög beírható körének sugara 3 egység, amelynek érintési pontja a háromszög egyik oldalát 3 és 4 egységnyi darabokra osztja. Mekkora a háromszög oldalai?

Megoldás:



Az $EOC_\triangle$ egyenlő szárú derékszögű, ezért $ECO\angle = 45^\circ$. Mivel a beírható kör középpontja a szögfelezők metszéspontja, ezért az említettek miatt az $ACB\angle = 90^\circ$.

Vezessük be a $BF = BG = x$ jelölést és alkalmazzuk az ABC háromszögre Pitagorasz-tételét:

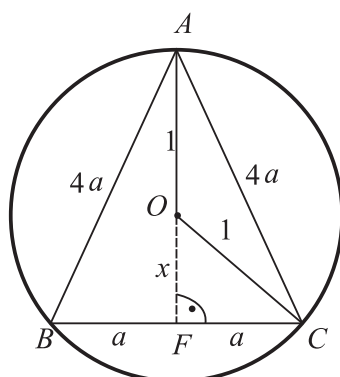
$$(x+4)^2 - (x+3)^2 = 7^2$$

$$2x+7=49, \quad x=21.$$

A háromszög oldalai: 7; 24 és 25 egység.

60. Egy egységsugarú körbe olyan egyenlő szárú háromszöget írunk, amelynek szára az alap kétszerese. Határozzuk meg a háromszögbe írt kör sugarának pontos értékét.

Megoldás:



Pitagorasz-tételét alkalmazva:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + a^2 = 1 \\ (x+1)^2 + a^2 = (4a)^2 \end{array} \right\}$$

$$x^2 + 2x + 1 + a^2 = 16a^2$$

$$1 + 2x + 1 = 16a^2 \quad a^2 = \frac{x+1}{8}$$

$$x^2 + \frac{x+1}{8} = 1, \quad 8x^2 + x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+224}}{16} = \frac{-1 \pm 15}{16}.$$

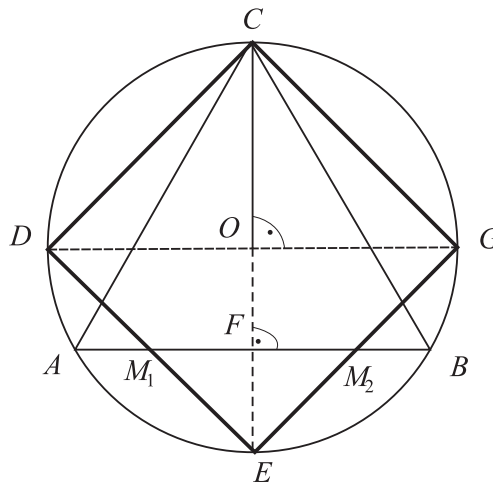
Mivel $x < 0$, ezért $x = \frac{7}{8}$, ezek után a számítható, $a = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

$$t_{ABC} = a \cdot AF = \frac{15}{8} \cdot \frac{\sqrt{15}}{8}; \quad s = \frac{k}{2} = \frac{10a}{2} = 5a;$$

$$t = r \cdot s; \quad a \cdot \frac{15}{8} = r \cdot 5a; \quad r = \frac{3}{8}.$$

61. Az egységsugarú körbe írjunk egy négyzetet és egy szabályos háromszöget oly módon, hogy egy csúcsuk közös legyen. Határozzuk meg a háromszög és a négyzet közös részének a területét.

Megoldás:



Az ABC_{Δ} háromszögben az O pont súlypont is, így $OC = 1$, $OF = FE = \frac{1}{2}$.

A CE az ábra szimmetriatengelye ezért $CDP_{\Delta} \cong CGP_{\Delta}$. Másrészt $M_1M_2E_{\Delta}$ egyenlő szárú és derékszögű ezért a hegyes szögei 45° - osak így $FM_2 = \frac{1}{2}$. Ebből adódóan

$$T_{M_1M_2E} = \frac{1}{4}.$$

Mivel a kör sugara 1, ezért a négyzet oldala $\sqrt{2}$. A COG derékszögű háromszögben $PCG\angle = 15^{\circ}$, így $PG = \sqrt{2} \tan 15^{\circ} = \sqrt{2} (2 - \sqrt{3})$.

(Könnyen belátható, hogy $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.)

$$T_{CDQ} = T_{CGP} = \frac{PG \cdot CG}{2} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

A négyzet területe 2 területegység, a közös rész területe pedig:

$$T = 2 - (2T_{CGP} + T_{M_1M_2E}) = 2 - \left(4 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{9}{4} \quad (\approx 1,21) \text{ terület egység.}$$

62. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 48 egység, a szára 30 egység. Határozzuk meg a beírt és köré írt kör sugarát, valamint a két kör középpontjának egymástól való távolságát.

Megoldás:

A megoldáshoz felhasználjuk a következő ismert formulákat:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad T = r \cdot s, \quad R = \frac{abc}{4T},$$

ahol a szokásos jelölés szerint a háromszög oldalait a, b, c , a beírt kör sugarát r , a köré írt kör sugarát R , a háromszög területét T , a félkerületet s jelöli.

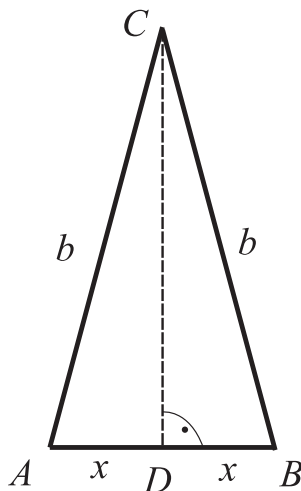
Alkalmazva az említett formulákat, a következő eredményhez jutunk:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = 54, \quad t = 432, \quad r = \frac{432}{54} = 8, \quad R = \frac{48 \cdot 30 \cdot 30}{4 \cdot 432} = 25.$$

Jelölje a száruk metszéspontját C . Ekkor mindkét középpont C -re illeszkedő magasságvonalon van (szimmetria okok miatt). A beírt kör középpontja legyen O_1 , a köré írté O_2 . Ekkor a két kör távolsága: $O_1O_2 = |CO_1 - CO_2| = 25 - 10 = 15$.

63. Határozzuk meg a háromszög területét, ha $\angle ACB = 30^\circ$, $AC = BC$ és a háromszög kerülete 5 egység.

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit felhasználva, hogy $\angle ACB = 30^\circ$ így $\angle ACD = 15^\circ$. A kerület 5 egység, ezért $2x + 2b = 5$.

$$\frac{x}{b} = \sin 15^\circ, \quad x = b \sin 15^\circ,$$

$$2b(1 + \sin 15^\circ) = 5$$

$$b = \frac{5}{2(1 + \sin 15^\circ)}$$

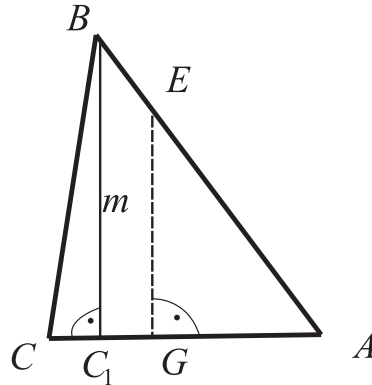
$$t = \frac{b^2}{2} \sin 30^\circ = \frac{b^2}{4} = \frac{25}{16(1 + \sin 15^\circ)^2} \approx 0,986 \text{ területegység.}$$

64. Egy háromszög oldalai: $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = \sqrt{17}$ egység.

Az ACB – re merőleges EG szakasz a háromszöget két egyenlő területű részre bontja.

Számítsuk ki az EG szakasz hosszát.

Megoldás:



Vezessük be a következő jelöléseket: $BC_1 = m$, $AC_1 = x$. Ekkor az adatok felhasználásával $CC_1 = 4 - x$. Pitagorasz - tételét alakalmazva:

$$\begin{cases} m^2 = 17 - (4 - x)^2 \\ m^2 = 25 - x^2 \end{cases}$$

$$17 - 16 + 8x - x^2 = 25 - x^2$$

$$8x = 24, \quad x = 3, \quad m^2 = 25 - 9, \quad m = 4.$$

$$\left. \begin{aligned} t_{ABC_1} &= \frac{3}{4} t_{ABC} \\ t_{AEG} &= \frac{1}{2} t_{ABC} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{t_{AEG}}{t_{ABC_1}} = \frac{2}{3}$$

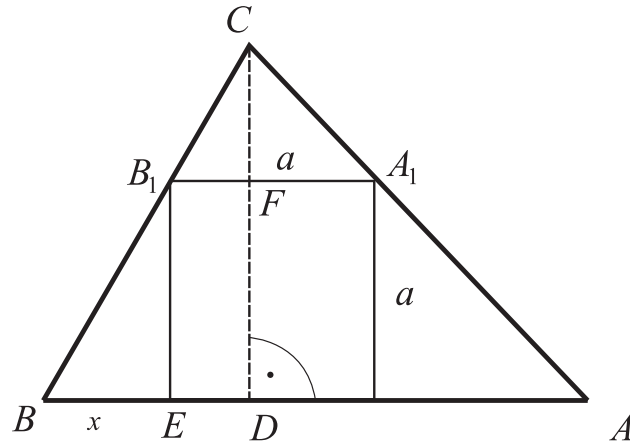
Az $ABC_1 \triangle \sim AEG \triangle$, ezért

$$\left(\frac{EG}{m} \right)^2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{EG}{m} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad EG = 4\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 3,27.$$

65. Az ABC háromszögbe írjunk négyzetet oly módon, hogy annak egyik oldala az AB oldalon legyen. Mekkora a négyzet oldala, ha

$AB = AC = 8$, a $BC = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$ egység.

Megoldás:



Pitagorsz-tételét alkalmazva:

$$\left. \begin{array}{l} m^2 = 64 \cdot \frac{2}{5} - x^2 \\ m^2 = 64 - (8 - x)^2 \end{array} \right\}$$

$$64 - 64 + 16x - x^2 = 64 \cdot \frac{2}{3} - x^2$$

$$16x = 64 \cdot \frac{2}{3}, \quad x = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$m^2 = 64 \cdot \frac{2}{3} - \frac{64}{25} = \frac{576}{25}, \quad m = \frac{24}{5} = 4, 8.$$

Mivel $A_1B_1C_\Delta \sim ABC_\Delta$ ezért:

$$\frac{m-a}{a} = \frac{m}{8}, \quad \frac{m}{a} - 1 = \frac{m}{8}, \quad \frac{m}{a} \quad a = \frac{8m}{m+8}$$

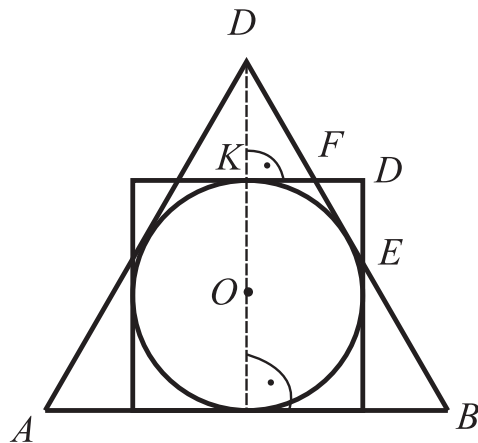
$$a = \frac{8 \cdot \frac{24}{5}}{8 + \frac{24}{5}} = \frac{8 \cdot 24}{64} = 3.$$

66. Az egységsugarú kör köré írjunk négyzetet és szabályos háromszöget oly módon, hogy a négyzet egyik oldala a háromszög egyik oldalára essen. Mekkora a háromszög és a négyzet közös részének a területe?

Megoldás:

Jelölje a szabályos háromszög oldalát a az adatokból a kör sugara 1 egység, a négyzet oldala 2 egység a szabályos háromszög magassága mint ismert $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A háromszögbe írt kör középpontja egyben a háromszög súlypontja is, ezért az O harmadolja a magasságot, a harmada 1 egység, ezért a magasság 3 egység. Ebből adódóan $DK = 1$ egység.



$$3 = \frac{q\sqrt{3}}{2}, \quad a = 2\sqrt{3}.$$

$$KF = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad FD = 1 - KF = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$x = FD\sqrt{3} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{3} = \sqrt{3} - 1.$$

A négyzetből levágott háromszög t_Δ területe:

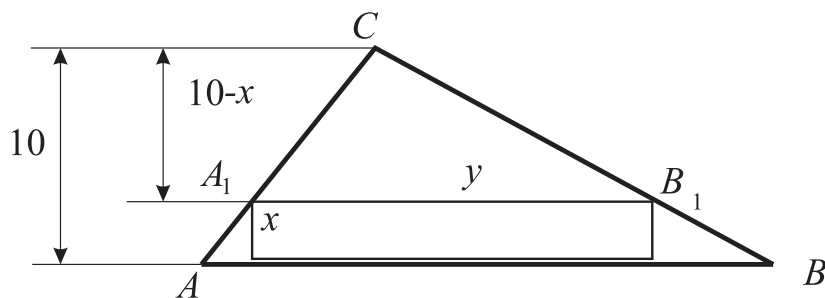
$$\begin{aligned} t_\Delta &= \frac{1}{2}FD \cdot DE = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(\sqrt{3} - 1) = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3} - 1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}(2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

A közös rész t_k területet megkapjuk, ha a négyzet területéből elvesszük a két t_Δ területet:

$$t_k = 4 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(2 - \sqrt{3}) = 4 - \frac{2}{3}(2\sqrt{3} - 3) = \frac{2}{3}(2\sqrt{3} - 3) \approx 3,69 \text{ terület egység.}$$

67. Adott a háromszög egyik oldala: $AB = 30$ egység, a hozzá tartozó magasság 10 egység. A háromszögbe olyan téglalapot írunk, amelynek egyik oldala AB -re illeszkedik. Mekkora a téglalap oldalai, ha területe 63 területegység?

Megoldás:



Az $A_1B_1C_\Delta \sim ABC_\Delta$ ezért:

$$\frac{y}{30} = \frac{10 - x}{10}.$$

Másrészt ismert a terület, ezért: $xy = 63$.

Az első egyenletből $y = 3(10 - x)$, behelyettesítve a másik egyenletbe:

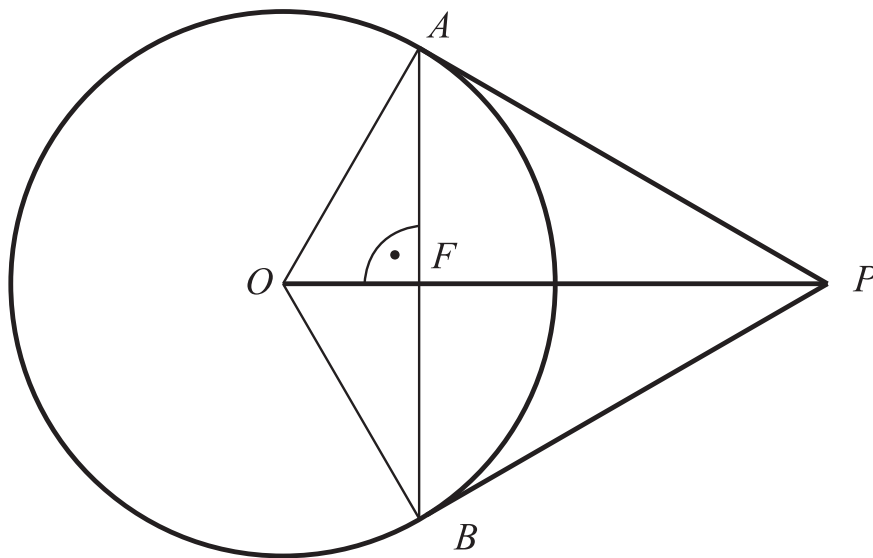
$$3x(10 - x) = 63, \quad x(10 - x) = 21,$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0, \quad x_1 = 7, y_1 = 9; x_2 = 3, y_2 = 21.$$

Mindkét megoldás lehetséges.

68. A 4 egység sugarú kör középpontjától 8 egységnyi távolságra levő P pontból húzza meg a kör érintőit; az érintési pontokat jelölje A , illetve B . Számítsa ki az APB szög nagyságát, az AB szakasz hosszát, valamint a két érintő és az érintési pontok közé eső rövidebb AB ív által határolt síkidom területét.

Megoldás:



Mivel $OP = 2 \cdot OA$ ezért $\angle POA = 30^\circ$, vagyis $\angle APB = 60^\circ$, $AP = 4\sqrt{3}$.

Az $ABP\Delta$ szabályos, ezért $AB = 4\sqrt{3}$.

$$T_{APBO} = \frac{OP \cdot AB}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}.$$

Az ABO körcikk egy harmadkör, ezért területe: $T_{ABO} = \frac{16\pi}{3}$

A keresett terület: $t = 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} = 16 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \approx 10,96$ területegység.

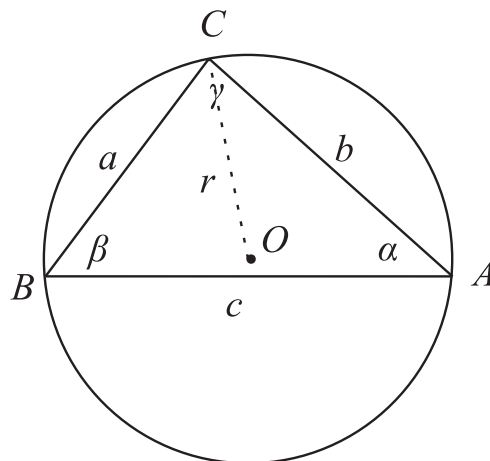
69. Egy hegyesszögű háromszög két oldala 20 és 24 egység, a háromszög köré írható kör sugara 15 egység. Számítsa ki a háromszög szögeit és a harmadik oldal hosszát.

Megoldás:

Az ábrán az adatok a következők: $a = 20$, $b = 24$, $r = 15$.

A "húrképlet" szerint $a = 2r \sin \alpha = 2 \cdot 15 \sin \alpha$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha = 41,81^\circ$.

$$b = 2r \sin \beta, \quad \sin \beta = \frac{b}{2r} = \frac{24}{30} = 0,8; \quad \beta = 53,13^\circ.$$



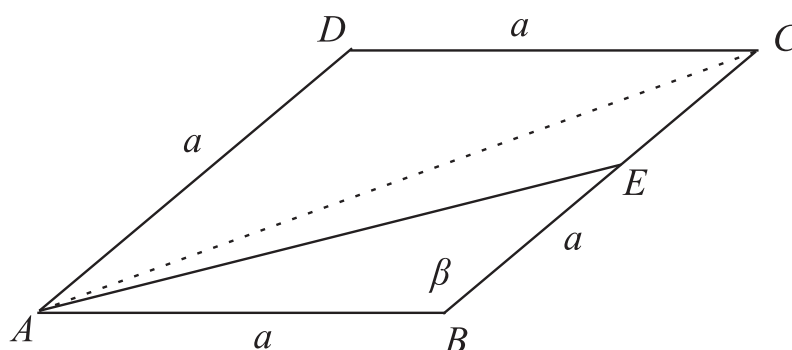
$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 94,94^\circ = 85,06^\circ.$$

$$c = 2r \sin \gamma, \quad c = 30 \sin 85,06^\circ \approx 29,89 \text{ egység.}$$

70. Egy rombusz oldala 12 egység hosszú, az egyik szöge 140° . Egyik hegyesszögének csúcsából két szelővel három egyenlő területű részre bontjuk a rombuszt. Mekkora egy-egy rész területe, és mekkora a szelőknek a rombuszba eső darabja?

Megoldás:

Megoldás:



Az adatok a következők: $a = 12$, $\beta = 140^\circ$.

$$t_{ABE} = \frac{1}{3} t_{ABCD} = \frac{2}{3} t_{ABC}$$

Mivel $ABE_{\triangle}$ és $ABC_{\triangle}BE$ illetve BC oldalhoz tartozó magasság azonos, ezért

$$BE = \frac{2}{3} \cdot BC \quad \rightarrow \quad BE = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8.$$

A koszinusztételt alkalmazva:

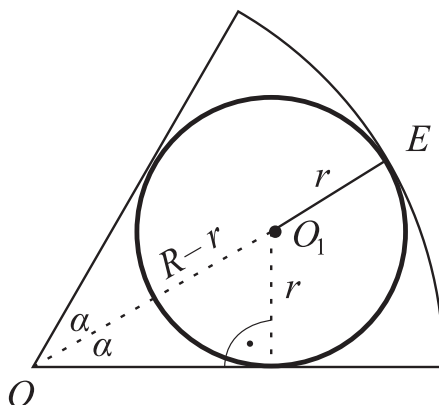
$$AE^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cos 140^\circ$$

$$AE^2 = 144 + 64 + 24 \cdot \cos 40^\circ = 355,0805$$

$$AE = 18,84 \text{ egység.}$$

$$t_{ABE} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \sin 40^\circ = 48 \cdot \sin 40^\circ = 30,85 \text{ területegység.}$$

71. Az r sugarú kör úgy helyezkedik el a R sugarú 2α középponti szögű körcikkben, hogy a körcikket határoló körívet és mindkét sugarat érinti. Fejezzük ki r -et R -rel és α -val.
Megoldás:



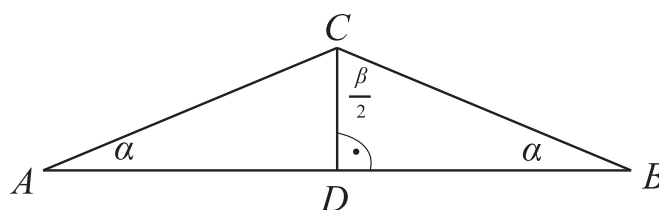
$$\frac{r}{R-r} = \sin \alpha$$

$$r = R \sin \alpha - r \sin \alpha$$

$$r(1 + \sin \alpha) = R \sin \alpha$$

$$r = \frac{R \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

72. Egy egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek szinusza $\frac{5}{13}$. Táblázat alkalmazása nélkül számítsa ki a két szár által bezárt szög tangensét.
Megoldás:



Adott, hogy $\sin \alpha = \frac{5}{12}$, ezért feltehető, hogy a rajzon $CD = 5$, $BC = 13$ egység, így $BD = 12$ egység.

$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{12}{5}$, ezt követően alkalmazzuk a következő - ismert - képletet:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$$\text{Kapjuk, hogy } \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{24}{5}}{1 - \frac{144}{25}} = -\frac{120}{119}.$$

73. Az ABC háromszög oldalai természetes számok.

Legyen $BC = a, AC = b, AB = c, b + c = 5a$ és a C csúcsnál fekvő szög 60° . Számítsa ki a legkisebb kerületű háromszög területét.

Megoldás:

A koszinusztételt alkalmazva:

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - ab \\ c &= 5a - b \end{aligned} \right\}$$

$$(5a - b)^2 = a^2 + b^2 - ab$$

$$25a^2 - 10ab + b^2 = a^2 + b^2 - ab$$

$$24a^2 - 9ab = 0, \text{ mivel } a > 0, \text{ ezért}$$

$$8a - 3b = 0, \quad b = \frac{8a}{3}.$$

Az a oldal lehető legkisebb értéke $a = 3$ és ekkor a többi oldal minimális értéke:

$b = 8$ és $c = 7$.

$$t_{\Delta} = \frac{3 \cdot 8 \sin 60^\circ}{2} = 6\sqrt{3} (\approx 10,39) \text{ terület egység.}$$

74. Egy háromszög három oldalának mindegyike kisebb 1-nél. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög területe kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Megoldás:

A háromszögnek van olyan szöge, amely nem nagyobb, mint 60° . Ha ugyanis nem lenne, akkor a szögek összege nagyobb lenne 180° -nál, ami lehetetlen.

$$t = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \leq \frac{1}{2}ab \sin 60^\circ < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ terület egység.}$$

75. Egy háromszög egyik szöge 120° , az oldalak olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek különbsége 1. Mekkora a háromszög oldalai?

Megoldás:

Jelöljük a háromszög oldalait a következőképp: $x - 1, x, x + 1$. Ekkor a 120° -os szög az $x + 1$ -es oldallal szemben van. A koszinusztételt alkalmazva:

$$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 - 2x(x - 1) \cos 120^\circ$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 + 2x(x - 1) \frac{1}{2}$$

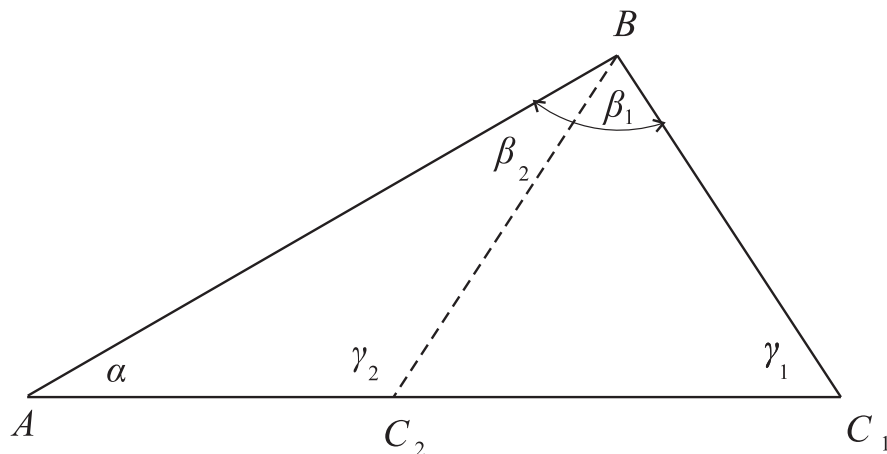
$$2x = x^2 - 2x + x^2 - x$$

$$2x^2 - 5x = 0 \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2,5.$$

Mivel $x > 1$, ezért a háromszög oldalai 1,5; 2,5; 3,3 egység.

76. Mekkora az ABC háromszög szögei és ismeretlen oldala, ha $AB = 10, BC = 8$ egység, és $BAC\angle = 30^\circ$.

Megoldás:



Mivel két oldal és a kisebbikkel szemközti szög adott, ezért a feladat nem egyértelmű (két megoldás van). A szinusz-tételt alkalmazzuk:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{AB}{BC} \quad \Rightarrow \quad \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{8} = 0,625$$

$$\gamma_1 = 38,68^\circ, \quad \gamma_2 = 141,32^\circ, \quad \beta_1 = 111,32^\circ, \quad \beta_2 = 8,68^\circ.$$

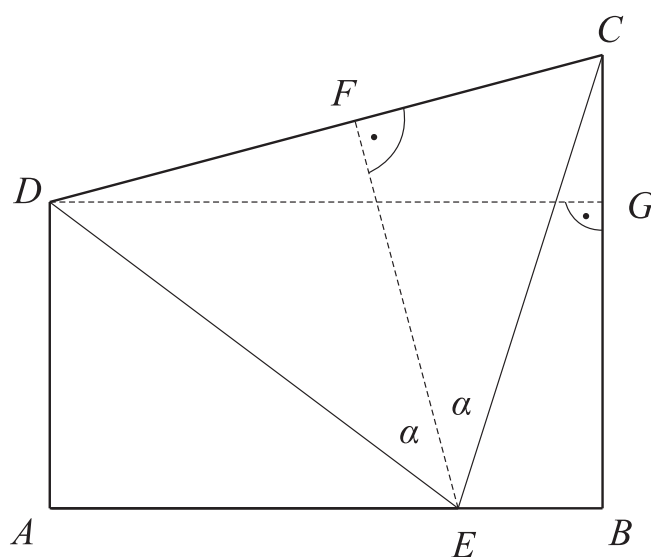
$$\frac{b_1}{\sin \beta_1} = \frac{8}{\sin 30^\circ} \qquad \frac{b_2}{\sin \beta_2} = \frac{8}{\sin 30^\circ}$$

$$b_1 = 16 \sin 111,32^\circ \qquad b_2 = 16 \sin 8,68^\circ$$

$$b_1 = 14,91 \text{ egység} \qquad b_2 = 2,41 \text{ egység.}$$

77. Az $ABCD$ trapéz derékszögű; a derékszögű csúcsok A és B . A párhuzamos oldalak $AD = 15$, $BC = 24$ egység. A CD oldal felező merőlegese az AB oldalt olyan E pontban metszi, amelyre $AE = 20$ egység. Határozzuk meg a CED szög nagyságát.

Megoldás:



$CG = BC - AD = 24 - 15 = 9$, Pitagorasz-tételét alkalmazva:

$$DE^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625, \quad DE = CE = 25.$$

$$BE^2 = 25^2 - 24^2 = 625 - 576 = 49, \quad BE = 7.$$

$$CD^2 = 27^2 + 9^2 = 810, \quad CD = 28,46; \quad \Rightarrow \quad DF = 14,23.$$

$$\sin \alpha = \frac{DF}{DE} = \frac{14,23}{25} = 0,5692 \Rightarrow \alpha = 34,69^\circ.$$

A keresett szög: $CED\angle = 2\alpha = 69,38^\circ$.

78. Egy háromszög oldalainak aránya: $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög legnagyobb szöge a legkisebb szögének kétszerese.

Megoldás:

Vezessük be a következő jelölést: $a = 4x$, $b = 5x$, $c = 6x$, ahol $x > 0$. Mivel c a legnagyobb, ezért vele szemközt va a legnagyobb szög, amit jelöljön γ . A koszinusztételt alkalmazva a következőt kapjuk:

$$(6x)^2 = (4x)^2 + (5x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 5x \cos \gamma$$

$$36x^2 = 16x^2 + 25x^2 - 40x^2 \cos \gamma$$

$$40x^2 \cos \gamma = 5x^2, \quad \cos \gamma = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}.$$

Azt kell megmutatni, hogy $\gamma = 2\alpha$. Ehhez elég belátni, hogy $\cos 2\alpha = \cos \gamma$ igaz.

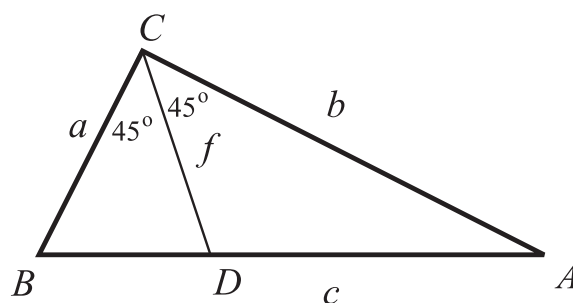
Ismeretes, hogy $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8},$$

ami éppen $\cos \gamma$. $\cos 2\alpha = \cos \gamma$, és mivel háromszögről lévén szó $2\alpha = \gamma$ következik.

79. A derékszögű háromszög derékszögének szögfelezője f egység, amely az átfogót $4 : 7$ arányban osztja. Fejezzük ki f segítségével a háromszög oldalait.

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit, ekkor $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$. Írjuk fel a háromszög kétszeres területét a két részháromszög területének az összegeként!

$$ab = af \frac{\sqrt{2}}{2} + bf \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Osszuk el a kapott egyenletet b - vel :

$$a = f \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{a}{b} + 1\right) = f \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{4}{7} + 1\right) = f \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{11}{7} = \frac{11f\sqrt{2}}{14}.$$

$$b = \frac{7}{4}a = \frac{7}{4} \cdot \frac{11f\sqrt{2}}{14} = \frac{11f\sqrt{2}}{8}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{11f\sqrt{2}}{14}\right)^2 + \left(\frac{11f\sqrt{2}}{8}\right)^2 = 11^2 f^2 \left(\frac{1}{7^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^5}\right)$$

$$c^2 = 11^2 f^2 \cdot \frac{16 + 49}{7^2 \cdot 2^5} = 11^2 f^2 \cdot \frac{65}{7^2 \cdot 2^5} = 11^2 f^2 \cdot \frac{130}{7^2 \cdot 2^6}$$

$$c = \frac{11f\sqrt{130}}{56}.$$

80. Egy háromszög oldalai olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek különbsége 1. Legnagyobb szöge a legkisebb szögének kétszerese. Határozzuk meg a legkisebb szögének koszinuszát.

Megoldás:

Legyenek a háromszög oldalai $a - 1$; a ; $a + 1$ ahol $a > 1$. Ekkor a legkisebb szög az $a - 1$ oldallal szemben van, jelölje ezt α és ekkor a legnagyobb szög 2α , ami az $a + 1$ - es oldallal van szemben. A megoldás során a szinusztételt és a koszinusztételt alkalmazzuk.

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{a + 1}{a - 1}, \quad \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{a + 1}{a - 1}, \quad 2 \cos \alpha = \frac{a + 1}{a - 1}.$$

$$(a - 1)^2 = (a + 1)^2 + a^2 - 2a(a + 1) \cos \alpha$$

$$(a - 1)^2 = (a + 1)^2 + a^2 - a(a + 1) \cdot \frac{a + 1}{a - 1}$$

$$a(a + 1) \cdot \frac{a + 1}{a - 1} = a^2 + 2a + 1 + a^2 - a^2 + 2a - 1$$

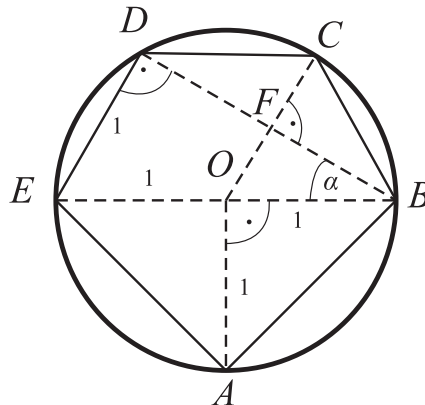
$$a(a + 1) \cdot \frac{a + 1}{a - 1} = a^2 + 4a$$

$$(a + 1)^2 = (a + 4)(a - 1), \quad a^2 + 2a + 1 = a^2 + 3a - 4, \quad a = 5.$$

A háromszög oldalai 4; 5; és 6, a legkisebb szög koszinusza: $\cos \alpha = \frac{a + 1}{2(a - 1)} = \frac{3}{4}$.

81. Az $ABCDE$ ötszög köré írható körének sugara egységnyi. Mekkora az ötszög területe, ha ismeretes, hogy $AB = \sqrt{2}$, $\angle ABE = 45^\circ$ és $BC = CD$, $DE = 1$.

Megoldás:



A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt az ABO_Δ egyenlő szárú és derékszögű, ezért

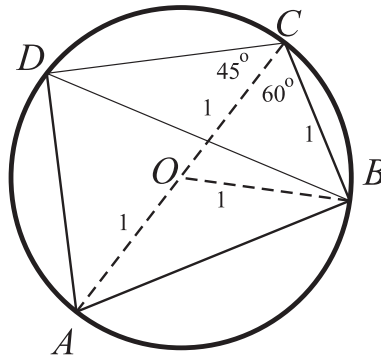
$ABO\angle = 45^\circ$ és így $ABE\angle = 45^\circ$ miatt BE a kör átmérője, ezért a BED_Δ derékszögű háromszög. Ebben a háromszögben $BE = 2$, $DE = 1$, ezért $\alpha = 30^\circ$ és $BD = \sqrt{3}$. Az OS a BDE_Δ középvonala, ezért $OF = \frac{1}{2}$ és így $CF = \frac{1}{2}$.

$t_{ABE} = 1$ terület egység; $t_{BDE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ terület egység; $t_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ terület egység.

Az ötszög területe: $T = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} (\approx 2,3)$ terület egység.

82. A körbe írható $ABCD$ négyszög BD átlója a kör átmérője. Számítsuk ki az AC átló hosszát, ha ismeretes, hogy $BD = 2$, $AB = 1$, $ABD\angle : DBC\angle = 4 : 3$.

Megoldás:



A feltétel miatt ABO_Δ szabályos, így $ABD\angle = 60^\circ$. Ezért egy arányos részre 15° jut, következésképp $DBC\angle = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$ $ABC\angle = 105^\circ$. A húrképletet alkalmazva:

$$AC = 2 \cdot 1 \cdot \sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + 1) (\approx 1,93) \text{ egység.}$$

83. Egy szabályos n oldalú és egy szabályos $2n$ oldalú sokszög kerülete egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy területük aránya:

$$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}.$$

Megoldás:

Az n oldalú szabályos sokszög egy oldalához tartozó középponti szög $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, a köré írható kör sugara r_1 .

Az oldal hossza: $a_n = 2r_1 \sin \frac{\pi}{n}$, a húrképlet szerint.

A $2n$ oldalú szabályos sokszög egy oldalához tartozó középponti szög $\beta = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$, a köré írható kör sugara r_2 .

Az oldal hossza: $a_{2n} = 2r_2 \sin \frac{\pi}{2n}$.

$$k_n = n 2r_1 \sin \frac{\pi}{n}; \quad k_{2n} = 2n \cdot 2r_2 \sin \frac{\pi}{2n}$$

A feltétel szerint $k_n = k_{2n}$, azaz

$$n \cdot 2r_1 \sin \frac{\pi}{n} = 2n \cdot 2r_2 \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$r_1 \sin \frac{\pi}{n} = 2r_2 \sin \frac{\pi}{2n}$$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ alapján

$$2r_1 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} = 2r_2 \sin \frac{\pi}{2n}, \text{ ahonnan}$$

$$r_1 \cos \frac{\pi}{2n} = r_2, \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = \cos \frac{\pi}{2n}.$$

$$t_n = n \cdot \frac{r_1^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}; \quad t_{2n} = 2n \cdot \frac{r_2^2}{2} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\frac{t_{2n}}{t_n} = \frac{2nr_2^2}{nr_1} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n}} = 2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}$$

$$\frac{t_{2n}}{t_n} = 2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2n}$$

$$\frac{t_{2n}}{t_n} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi}{2n}}$$

$$\frac{t_n}{t_{2n}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}} = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n} \text{ és ezt kellett igazolni.}$$

84. Az ABC háromszög beírható körének sugara r , magasságvonalai m_a , m_b , m_c . Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}.$$

Megoldás:

A háromszög oldalainak mérőszámai: a , b , c , a területe T . Ismeretes, hogy

$T = r \cdot s$, ahol $s = \frac{a+b+c}{2}$ és r a beírható kör sugara.

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_a} = \frac{a}{2T}, \quad \frac{1}{m_b} = \frac{b}{2T}, \quad \frac{1}{m_c} = \frac{c}{2T}.$$

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} = \frac{1}{2T} (a + b + c) = \frac{1}{T} \cdot \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{s}{T} = \frac{1}{r}.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

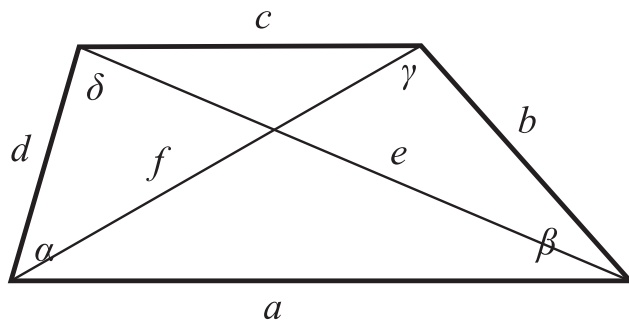
85. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai a és c , a szárjai b és d ; az átlók hossza e és f . Bizonyítsuk be, hogy

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

Megoldás:

A koszinusztételt fogjuk alkalmazni. Az ábrán a trapéz szögeit a szokásos módon jelöltük, köztudott, hogy $\alpha + \delta = 180^\circ$, $\beta + \gamma = 180^\circ$.

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha \\ f^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta = c^2 + d^2 + 2cd \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$



Ezekből $\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - e^2}{2ad}$ $\cos \alpha = \frac{f^2 - c^2 - d^2}{2cd}$.

$$\frac{a^2 + d^2 - e^2}{2ad} = \frac{f^2 - c^2 - d^2}{2cd}$$

$$\frac{a^2 + d^2 - e^2}{a} = \frac{f^2 - c^2 - d^2}{c}$$

$$a^2c + d^2c - e^2c = f^2a - c^2a - d^2a$$

$$e^2c + f^2a = a^2c + c^2a + d^2(a + c) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= b^2b + c^2 - 2bc \cos \gamma = b^2 + c^2 + 2bc \cos \beta \\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2ab \cos \beta \end{aligned} \right\}$$

Ezekből hasonlóan mint az előzőekben:

$$\cos \beta = \frac{e^2 - b^2 - c^2}{2bc} \quad \cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2ab}$$

$$\frac{e^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2ab}$$

$$\frac{e^2 - b^2 - c^2}{c} = \frac{a^2 + b^2 - f^2}{a}$$

$$e^2a - b^2a - c^2a = a^2c + b^2c - f^2c$$

$$e^2a + f^2c = a^2c + c^2a + b^2(a + c) \quad (2)$$

Az (1) és (2) összegéből kiemelésekkel kapjuk:

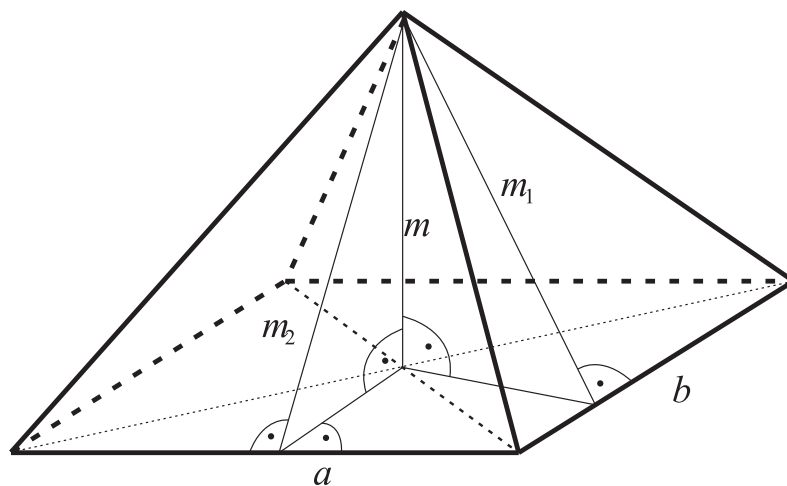
$$e^2(a + c) + f^2(a + c) = (b^2 + d^2)(a + c) + 2ac(a + c)$$

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac \quad \text{és ezt kellett igazolni.}$$

86. Egy gúla alaplappja olyan paralelogramma, amelynek oldalai 10 és 18 egység, területe 90 területegység. A gúla magassága 6 egység és a magasság talppontja az alaplapp átlóinak metszéspontja. Mekkora a gúla oldalfelülete?

Megoldás:

Az adatok a rajz szerint a következők: $a = 18$, $b = 10$, $m = 5$. A paralelogramma magasságai a terület és az oldalak alapján: $m_a = 5$, $m_b = 9$ egység.



A gúla magasságán az alapélre merőleges sík az oldallapot éppen az oldalmagasság mentén metszi. Így az ábra alapján Pitagorasz-tételét alkalmazva az oldalmagasságok kiszámíthatók.

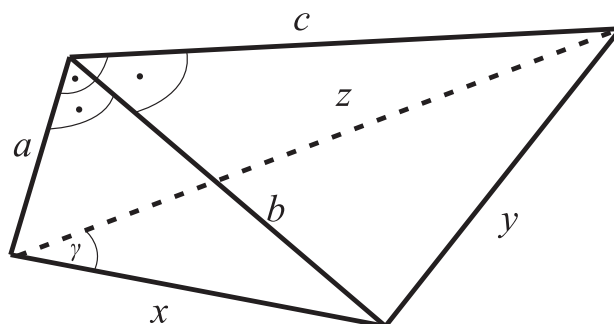
$$m_1^2 = 6^2 + 4,5^2 = 36 + 6,25 = 56,25 \quad m_1 = 7,5.$$

$$m_2^2 = 6^2 + 2,5^2 = 36 + 6,25 = 42,25 \quad m_2 = 6,5.$$

$$P = 18 \cdot 6,5 + 10 \cdot 7,5 = 117 + 75 = 192 \text{ terület egység.}$$

87. Egy tetraéder oldalai $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{126}$. Ezek egymásra páronként merőlegesek. Mekkora a térfogata és az alaplap területe?

Megoldás:



$$V = \frac{\sqrt{70} \cdot \sqrt{99} \cdot \sqrt{126}}{6} = 21\sqrt{55} \approx 155,74 \text{ térfogat egység.}$$

$$x^2 = 70 + 99 = 169, \quad x = 13;$$

$$y^2 = 99 + 126 = 225, \quad y = 15;$$

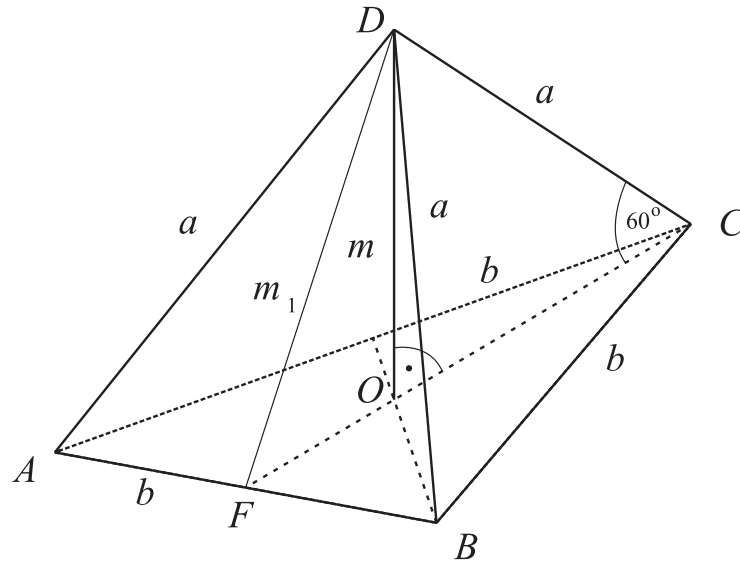
$$z^2 = 70 + 126 = 196, \quad z = 14.$$

A területet Heron-képlettel számoljuk, de megjegyezzük, hogy a szokásos területképlettel is dolgozhatunk, ha előtte koszinusztétellel kiszámoljuk a γ szöveget.

$$T = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = \sqrt{7056} = 84 \text{ terület egység.}$$

88. Egy szabályos háromoldalú gúla oldaléle a egység; az oldalélek az alaplap síkjával 60° -os szöget zárnak be. Fejezzük ki a -val a gúla felszínét és térfogatát.

Megoldás:



$$OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{3}, \quad \text{másképp} \quad \frac{OC}{a} = \cos 60^\circ, \quad \Rightarrow \quad OC = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Ezek összevetéséből: } \frac{b\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{m}{a} = \sin 60^\circ, \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$OF = \frac{1}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}.$$

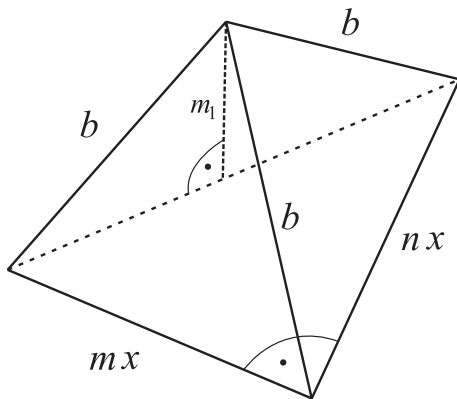
$$m_1^2 = OF^2 + m^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{16}; \quad m_1 = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

$$A = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{bm_1}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{3a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{15} (1 + \sqrt{13}) \approx 1,496a^2.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot m = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{32}.$$

89. Egy tetraéder alaplapja olyan derékszögű háromszög, amelynek átfogója c , befogóinak aránya $m : n$, az oldalélek hossza b . Számítsuk ki a térfogatát.

Megoldás:



A Pitagorasz-tételét alkalmazva:

$$m^2 x^2 + n^2 x^2 = c^2, \quad x^2 (m^2 + n^2) = c^2 \quad x^2 = \frac{c^2}{m^2 + n^2}$$

$$T = \frac{mnx^2}{2} = \frac{mn}{2} \cdot \frac{c^2}{m^2 + n^2}$$

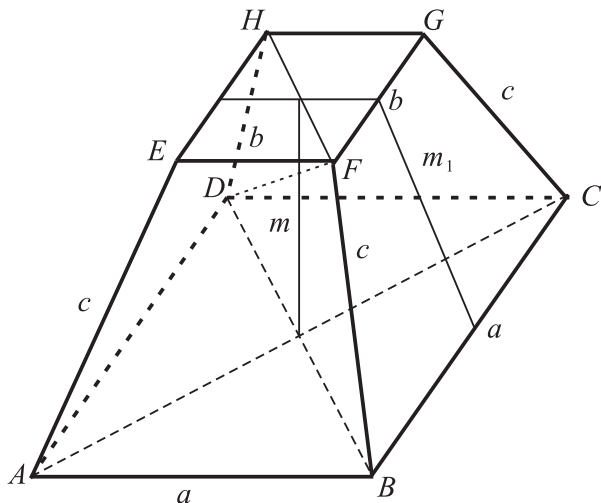
$$m_1^2 = b^2 - \frac{c^2}{4}, \quad \Rightarrow \quad m_1 = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}};$$

$$V = \frac{T \cdot m_1}{3} = \frac{mn}{6} \cdot \frac{c^2}{m^2 + n^2} \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

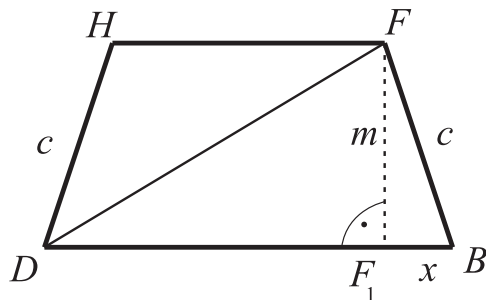
Fel kell tenni, hogy $b^2 - \frac{c^2}{4} > 0$, azaz $b^2 > \frac{c^2}{4}$, $b > \frac{c}{2}$.

90. A szabályos négyoldalú csonka gúla alap és fedőéle 5 és 11 egység. A testátló hossza 12 egység. Mekkora az oldalfelzíne?

Megoldás:

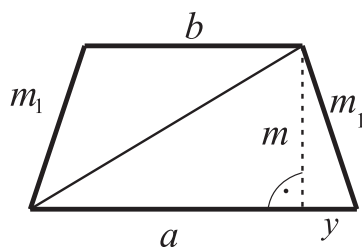


Tekintsük a $DBFH$ síkmetszetet!



$$DB = a\sqrt{2}, \quad HF = b\sqrt{2}, \quad \text{így } x = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}, \quad DF_1 = a\sqrt{2} - x = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

$$m^2 = 12^2 - (8\sqrt{2})^2 = 144 - 128 = 16, \quad m = 4.$$



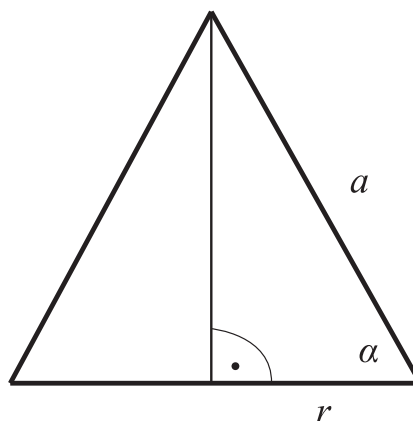
$$y = \frac{a-b}{2} m_1^2 = m^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 16 + 9 = 25; \quad m_1 = 5.$$

$$P = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot m_1 = 2(a+b)m_1 = 2 \cdot 16 \cdot 5 = 160 \text{ terület egység.}$$

91. A kúp alapkörének és alkotójának az összege n , az alkotónak az alaplapsíkkal bezárt szöge α . Mekkora kúp felszíne?

Megoldás:

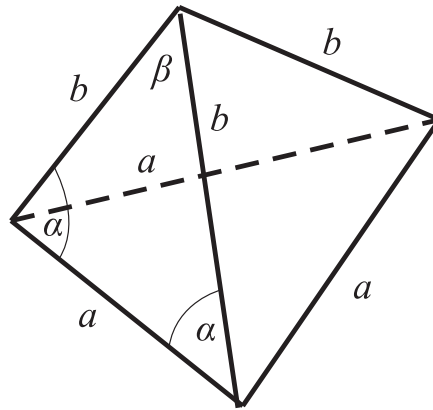
A kúp tengelymetszete tartalmazza a kúp eredeti adatait. Használjuk az ábra jelöléseit.



$$\begin{aligned}
r + a &= n, & \frac{r}{a} &= \cos \alpha & r &= a \cos \alpha \\
a(1 + \cos \alpha) &= n, & a &= \frac{n}{1 + \cos \alpha} & r &= \frac{n \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \\
A &= r\pi(r + a) = \frac{n^2 \pi \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}
\end{aligned}$$

92. Mekkora annak a szabályos háromoldalú gúlának a felszíne, a melynek a alapéle α szöget zár be az oldalélelkel.

Megoldás:



Az alapterület: $T = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad \beta = 180^\circ - 2\alpha.$

$$\cos \alpha = \frac{a}{2b} \Rightarrow b = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

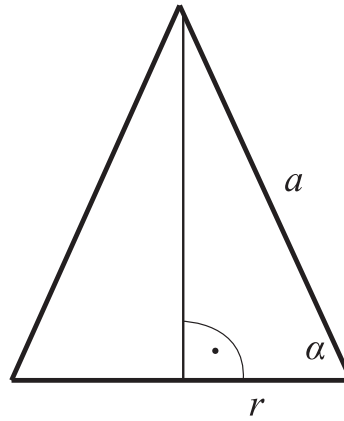
Egy oldallap területe:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{b^2 \sin(180^\circ - 2\alpha)}{2} = \frac{b^2}{4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{4 \cos^2 \alpha} = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{4} \\
A &= T + 3t = \frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + 3 \operatorname{tg} \alpha)
\end{aligned}$$

93. Egy egyenes kúp felszíne S , alkotója α szöget zár be az alaplap síkjával. Mekkora a kúp térfogata?

Megoldás:

$$\begin{aligned}
S &= r\pi(r + a), & a \cos \alpha &= r \\
S &= \pi \cos \alpha (a \cos \alpha + a) = \pi a^2 (1 + \cos \alpha) \cos \alpha
\end{aligned}$$



$$a^2 = \frac{S}{\pi \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}, \quad r^2 = a^2 \cos^2 \alpha = \frac{S \cos^2 \alpha}{\pi \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}$$

$$m = a \sin \alpha = \sin \alpha \sqrt{\frac{S}{\pi \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{S \sin^2 \alpha}{\pi \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}}$$

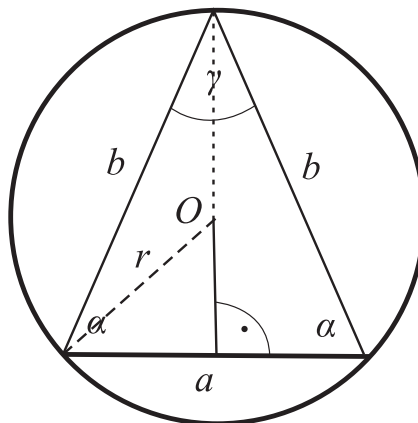
$$m = \sqrt{\frac{S (1 + \cos \alpha) (1 - \cos \alpha)}{\pi \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{S (1 - \cos \alpha)}{\pi \cos \alpha}}$$

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{S \cos \alpha}{3\pi (1 + \cos \alpha)} \cdot \sqrt{\frac{S (1 - \cos \alpha)}{\pi \cos \alpha}}.$$

94. Valamely gúla alaplapja olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja a és az alapon fekvő szöge α . A gúla oldalélei β szöget zárnak be az alaplap síkjával. Mekkora a gúla térfogata?

Megoldás:

A mondottak miatt olyan gúláról van szó, amelynek az oldalélei egyenlők, ezért a magasság talppontja az alapháromszög köré írható körének középpontjában van.

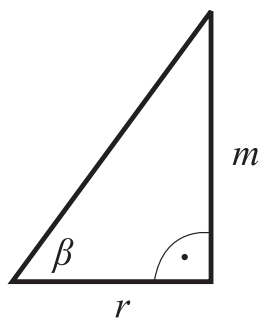


$$\gamma = 180^\circ - 2\alpha, \quad \sin \gamma = \sin (180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

A húrképlet alapján: $a = 2r \sin 2\alpha$, $r = \frac{a}{2 \sin 2\alpha}$, $b = 2r \sin \alpha$

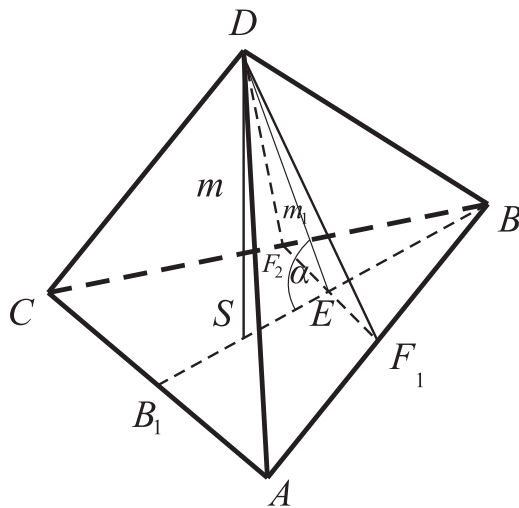
$$b = \frac{a \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

$$T = \frac{ab \sin \alpha}{2} = \frac{a^2 \sin \alpha}{4 \cos \alpha} = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{4}$$



$$\begin{aligned} \frac{m}{r} &= \operatorname{tg} \beta, & m &= r \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{2 \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta \\ V &= \frac{T \cdot m}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin 2\alpha} = \frac{a^3}{24} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ V &= \frac{a^3}{48} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

95. A szabályos háromoldalú gúla csúcsán és alapjának két oldalfelező pontján átmenő sík az alaplappal α szöget alkot; az alapél a . Mekkora a síkmetszet területe és a gúla térfogata?
Megoldás:



$$\begin{aligned} \text{Az ábra jelölései szerint } F_1F_2 &= \frac{a}{2}, & BB_1 &= \frac{a\sqrt{3}}{2}, & SB_1 &= \frac{BB_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ EB_1 &= \frac{BB_1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}, & ES &= \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{12} & m &= ES \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{12} \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ \frac{ES}{m_1} &= \cos \alpha, & m_1 &= \frac{ES}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Az } F_1F - 2D_{\triangle} \text{ területe: } t = \frac{1}{2} \cdot F_1F_2 \cdot m_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos \alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{48 \cos \alpha}$$

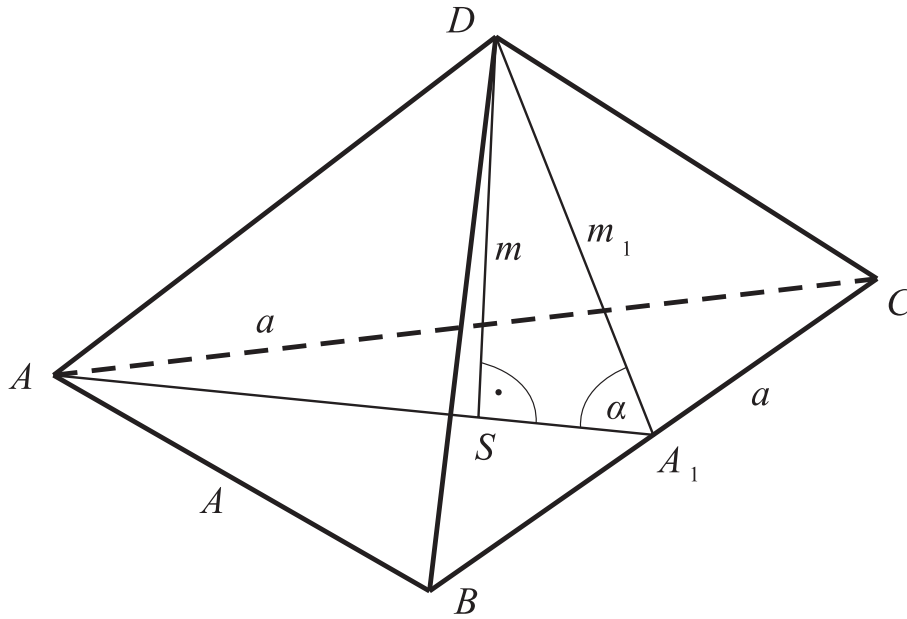
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{48}$$

$$T_{BDE} = \frac{a^2}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{a^2}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)}$$

$$T_{BDE} = \frac{a^2}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{2} \sqrt{\cos \alpha}$$

97. A szabályos háromoldalú gúla oldalélén és magasságán átmenő síkmetszet területének a gúla felszínéhez való aránya k . Mekkora az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?

Megoldás:



$$AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad SA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad \frac{m}{SA_1} = \operatorname{tg} \alpha, \quad m = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha$$

$$ADA_1 \text{ háromszög területe: } t = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2}{8} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{A teljes felszín: } A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{am_1}{2}, \quad \frac{m_1}{SA_1} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad m_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \alpha}$$

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)$$

Tegyük fel, hogy $\frac{A}{t} = k$, azaz $A = kt$, ahol $k > 0$.

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = k \cdot \frac{a^2}{8} \operatorname{tg} \alpha$$

$$2\sqrt{3} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = k \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = k \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$2\sqrt{3}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = k \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2\sqrt{3} \quad \text{Emeljük négyzetre:}$$

$$12(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4k\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha + 12$$

$$12 \operatorname{tg}^2 \alpha = k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4k\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$$

$$(k^2 - 12) \operatorname{tg}^2 \alpha = 4k\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha. \quad \text{Mivel} \quad \operatorname{tg} \alpha > 0 \quad \text{ezért:}$$

$$(k^2 - 12) \operatorname{tg} \alpha = 4k\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4k\sqrt{3}}{k^2 - 12}$$

Mivel $\operatorname{tg} \alpha > 0$ és $k > 0$, ezért kell, hogy

$$k^2 - 12 > 0 \text{ legyen, azaz } k > 2\sqrt{3}.$$