

Geometriai gyakorló feladatok

Összeállította: Dr. Tóber Ernő, Nagykanizsa, 1980.

1. Egy konvex sokszög belső szögeit – egy kivételével – összeadva 2570^0 adódik. Mekkora lehet a kimaradt szög?
2. Bizonyítsuk be, hogy a téglalap szögfelezői négyzetet határolnak.
3. Adott egy háromszög egyik oldalának egyenese és a másik két oldalhoz tartozó magasságának talppontja. Szerkesszük meg a háromszöget.
4. Adott egy kör, annak E pontjában az érintő és azon egy P pont. Szerkesszük meg azt a kört, amely az adott kört és az érintőt a megadott P pontban érinti.
5. Adott egy k kör és ennek síkjában egy e egyenes. A megadott körön vegyünk fel egy E pontot. Szerkesszünk kört, amely érinti az e egyenest és a megadott kört az E pontban.
6. Adva van egy háromszög két oldalának összege és a két oldal által bezárt szög. Szerkesszük meg a háromszöget úgy, hogy a harmadik oldal a lehető legkisebb legyen.
7. Az ADE háromszögben $ADE\angle = 140^0$, B az AD , C pedig az AE oldalon felvett olyan pontok, amelyre $AB = CD = DE$. Mekkora az $EAD\angle$?
8. Az ABC háromszög AB átfogójára a háromszöggel ellentétes oldalon szerkesszünk négyzetet. A négyzet D szimmetria középpontját kössük össze C – vel. Bizonyítsuk be, hogy CD felezi az ACB szöget.
9. Az ABC háromszög BC oldalát hosszabbítsuk meg C – n túl $CD = BC$ szakasszal. A C ponton át az AB – vel, a D ponton át az AC – vel húzott párhuzamos egyenesek metszéspontja E . Igazoljuk, hogy az ACE és az ABC háromszögek egybevágók. Igaz-e hogy az AD és a BE egyenesek S metszéspontja az ACE háromszög súlypontja?
10. Legyen AC , illetve BD az O középpontú kör két egymásra merőleges átmérője. Legyen P a rövidebb BC ív, Q a rövidebb AB ív olyan pontja, hogy $POQ\angle = 90^0$. Bizonyítsa be, hogy a $BCP\Delta \cong ABQ\Delta$.
11. A C – ben derékszögű ABC háromszög átfogójához tartozó magasság CD . Igazoljuk, hogy az ADC háromszög AM és a CDE háromszög CN súlyvonalainak egyenesei merőlegesek egymásra.
12. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcspontján áthaladó egyenes a BD átlót az E , a BC oldalt az F , a DC oldal meghosszabbítását a K pontban metszi. Számítsa ki az EF szakasz hosszát, ha $AE = 2$ egység és $EK = 3$ egység.
13. A derékszögű háromszög befogóinak hossza 5, illetve 12 egység. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja az átfogón van és a befogókat érinti?

14. Mekkora a rombusz oldala, ha a beírható kör sugara 2 egység és az egyik átló a rombuszt szabályos háromszögekre bontja?
15. Valamely derékszögű háromszögben a beírt kör olyan pontban érinti az átfogót, amely 5 és 12 egység hosszú szakaszokra osztja azt. Mekkora a befogók?
16. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 10 egység, a beírható körének sugara 5 egység. Számítsa ki a hiányzó oldalakat.
17. Egy derékszög szárait a csúctól felmérjük ugyanazt az a szakaszt. A kapott végpontoknak a derékszög csúcsán áthaladó tetszőleges egyenestől való távolsága legyen x és y . Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + y^2$ értéke nem függ az egyenes helyzetétől.
18. Számítsuk ki a derékszögű háromszög oldalait, ha a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza $\sqrt{15}$ illetve $\frac{\sqrt{73}}{2}$.
19. Az $AB = 2d$ szakasz középpontja körül rajzoljunk egy r sugarú kört. Bizonyítsuk be, hogy a kör tetszőleges P pontjára $AP^2 + BP^2$ állandó.
20. A 2 egység sugarú kör középpontja 6 egységnyi távolságra van egy egyenestől. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely a kört és az egyenest is érinti és középpontja 4 egységre van a 2 egységnyi sugarú kör középpontjából az egyenesre bocsátott merőlegetől.
21. Az a hosszúságú szakasz végpontjai körül, a szakasz tartóegyenesének egyik felsíkjában rajzoljuk meg az a sugarú köríveket. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely a szakaszt és a két körívet is érinti.
22. Két párhuzamos egyenes távolsága 8 egység. Két egyenlő sugarú, egymást érintő kör úgy helyezkedik el a két egyenes között, hogy egyik-egyik a párhuzamosok egyikét is érinti. A körök középpontjából a párhuzamosokra húzott merőleges egyenesek egymástól való távolsága 3 egység. Mekkora az érintő körök sugara?
23. Az r sugarú félkörben a határoló sugarak fölé befelé félköröket rajzolunk. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely mindhárom félkört érinti.
24. Az $AB = 4r$ átmérőjű félkörbe szerkesszünk egy r sugarú érintőkört, amely AB -t is érinti. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely a félkört és átmérőjét, valamint a beírt érintőkört is érinti.
25. Az $AB = 4r$ távolság végpontjai körül AB egyenesének egyik felsíkjában rajzoljunk AB sugarú köríveket. Az AB szakasz felére, az alábbi körívekkel azonos oldalra rajzoljunk félköröket. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely a félköröket és a köríveket is érinti.
26. Egy r sugarú körbe írt négyzet két csúcsa a köríven, a másik kettő pedig a határoló sugarakon van. Határozzuk meg a négyzet oldalát.

27. Az r sugarú, 120° – os középpontú szögű körcikkbe írjunk olyan érintőkört, amely érinti a sugarakat és a körívet. Számítsuk ki az érintőkör sugarát.
28. Az egységnyi sugarú kör érinti egy derékszög szarait. Határozzuk meg azon körök sugarait, amelyek a szögszárakat és az egységekört is érintik.
29. Az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében vegyünk fel egy C' pontot úgy, hogy ABC' háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög legyen. Milyen távol van a C' pont a C – től és a BC oldaltól, ha $BC = 10$.
30. Egy derékszögű háromszögben az átfogó a hozzá tartozó magasság $2\sqrt{2}$ – szöröse. Határozzuk meg a befogók arányát.
31. Egy szabályos tetraéder minden oldala a . Számítsuk ki két kitérő éle felezőpontjának távolságát.
32. Az ABC egység oldalú szabályos háromszög B csúcsa körül rajzoljunk egységekört és húzzuk meg a CD magasságot. Mekkora annak a körnek a sugara, amely az AB oldalt, a CD magasságot és az AC körívet belülről érinti.
33. Egy 2 egység oldalú négyzet két szomszédos oldala fölé befelé rajzoljunk félköröket. Számítsuk ki annak a körnek a sugarát, amely érinti a négyzet oldalát és az egyik félkört belülről, a másikat kívülről.
34. Egy trapéz párhuzamos oldalai a és c . A trapéz területét az alapokkal párhuzamos szakasszal megfelezzük. Mekkora ennek a szakasznak a hossza?
35. Az $ABCD$ szabályos tetraéder minden éle a . A D csúcsból induló magasság felezőpontja M . Bizonyítsuk be, hogy $AM \perp BM \perp CM$.
36. A szimmetrikus trapéz 13 egység hosszú átlója merőleges a szárakra, a trapéz magassága 5 egység. Mekkora a területe?
37. Egy deltoid átlói $2 - 2$, illetve 3 és 4 egységnyi darabokra osztják egymást. Mekkora a beírható kör sugara?
38. Egy trapéz egyik párhuzamos oldalának hossza 20 egység, magassága 12 egység, két szárának hossza 13, illetve 15 egység. Mekkora a trapéz területe?
39. Egy trapéz hosszabbik párhuzamos alapján lévő szögek 30° – osak. A többi három oldal mindegyike 12 cm . Mekkora a trapéz területe?
40. Egy 6 egység sugarú kör köré olyan derékszögű trapézt írunk, amelynek legkisebb oldala 9 egység. Számítsuk ki a trapéz területét.
41. Egy egyenlő szárú háromszög alapja a , szára b egység. Mekkora a szárakhoz tartozó magassága?

42. Az $ABCD$ trapéz AB alapján az A csúcsnál 60° – os szög van,
a B – nél pedig derékszög. A trapéz AB – vel párhuzamos oldala 4, a magassága pedig $2\sqrt{3}$. Határozza meg a trapéz hosszabbik átlóját, kerületét és területét.
43. Egy háromszög oldalai 10; 10; 12 egység. Számítsuk ki a háromszögbe írható, illetve a köré írható körének sugarát.
44. Egy derékszögű háromszög befogói 8 és 15 egység.
a) Mekkora a háromszög köréírt kör sugara?
b) Mekkora a háromszögbe írt kör sugara?
45. Határozza meg az r sugarú körbe írt szabályos nyolcszög oldalának és területének pontos mértékét.
46. Az $ABCD$ trapézban az A és a D csúcsnál derékszög van. A trapéz párhuzamos oldalai közül a CD a rövidebb, és ez éppen egyenlő a trapéz magasságával. A B csúcsból az AC átlóra bocsátott merőleges ezt az átlót M pontban metszi. A $\angle CBM = 15^\circ$, a BC oldal hossza 6 egység. Számítsuk ki a trapéz ismeretlen szögeit és területét.
47. Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög szögfelezőjének hossza 10 egység. Ez a szögfelező a szemközti befogóval 60° – os szöget zár be. Számítsuk ki a háromszög hegyesszögeit és oldalait. Mekkora területi részekre bontja ez a szögfelező az adott háromszöget?
48. Egy derékszögű háromszög területe 100 terület egység, a háromszögbe írható kör sugara 4 egység. Mekkora a háromszög oldalai?
49. Egy téglalapba konvex négyszöget írunk. A téglalap kerületén végighaladva, a beírt négyszög csúcsai a téglalap oldalait rendre azonos arányban osztják. Mekkora ez az arány, ha a beírt négyszög területének és a téglalap területének az aránya 5 : 8.
50. Egy K középpontú kör AM ívéhez 60° – os középponti szög tartozik. Jelölje B az MK egyenesnek a körrel alkotott másik metszéspontját, C pedig az MK egyenesnek azt a pontját, amely a körön kívül úgy helyezkedik el, hogy $BC = BA$. Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit és területét.
51. Az ABC háromszögben $AB = 4$ egység, $BC = 6$ egység, a B csúcsnál lévő szög 30° . A B csúcsnál lévő szög szögfelezője az AC oldalt a D pontban metszi. Mekkora az ABD háromszög területe?
52. Egy rombusz egyik szöge 150° . Bizonyítsuk be, hogy a rombusz oldala az átlók mértani közepe.
53. Adott a háromszög két oldala: $AC = 13$, $BC = 11$ egység és a C – ből induló súlyvonala $CM = 10$ egység. Mekkora a háromszög harmadik oldala és a területe?
54. Az ABC szabályos háromszög belsejében egy P pont úgy helyezkedik el, hogy $AP = BP = 2$ egység és $PC = 1$ egység. Mekkora a háromszög területe?

55. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 12 és 8 egység, szárai 4 egység hosszúak. Mekkora a trapéz területe? Milyen messze van az átlók metszéspontja a 8 egységnyi oldal végpontjaitól?
56. Egy derékszögű háromszög átfogója 12,5 egység, az egyik befogó 2,5 egységgel nagyobb a másiknál. Mekkora a befogók és a háromszög beírható körének sugara?
57. Az egyenlő szárú háromszög alapja 12 egység, a hozzá tartozó magasság 8 egység. A beírható körének az alappal párhuzamos érintőjéből mekkora darabot vágnak ki a szárak?
58. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójának hossza a egység. Az oldalak mindegyikére kifelé négyzeteket szerkesztünk. Ezek középpontjai O_1, O_2, O_3 . Számítsuk ki az O_1, O_2, O_3 háromszög kerületét és területét.
59. Egy háromszög beírható körének sugara 3 egység, amelynek érintési pontja a háromszög oldalát 3 és 4 egységnyi darabokra osztja. Mekkora a háromszög oldalai?
60. Egy egységsugarú körbe olyan egyenlő szárú háromszöget írunk, amelynek szára az alap kétszerese. Határozzuk meg a háromszögbe írt kör sugarának pontos értékét.
61. Az egységsugarú köre írjunk egy négyzetet és egy szabályos háromszöget oly módon, hogy egy csúcsuk közös legyen. Határozzuk meg a háromszög és a négyzet közös részének a területét.
62. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 48 egység, a szára 30 egység. Határozzuk meg a beírt és köréírt kör sugarát, valamint a két kör középpontjának egymástól való távolságát.
63. Határozzuk meg a háromszög területét, ha $\angle ACB = 30^\circ$, $AC = BC$ és a háromszög kerülete 5 egység.
64. Egy háromszög oldalai: $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = \sqrt{17}$ egység.
Az ACB – re merőleges EG szakasz a háromszöget két egyenlő területű részre bontja. Számítsuk ki az EG szakasz hosszát.
65. Az ABC háromszögbe írjunk négyzetet oly módon, hogy annak egyik oldala az AB oldalon legyen. Mekkora a négyzet oldala, ha
 $AB = AC = 8$, a $BC = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$ egység.
66. Az egységsugarú kör köré írjunk négyzetet és szabályos háromszöget oly módon, hogy a négyzet egyik oldala a háromszög egyik oldalára essen. Mekkora a háromszög és a négyzet közös részének a területe?
67. Adott a háromszög egyik oldala: $AB = 30$ egység, a hozzá tartozó magasság 10 egység. A háromszögbe olyan téglalapot írunk, amelynek egyik oldala AB – re illeszkedik. Mekkora a téglalap oldalai, ha területe 63 területegység?

68. A 4 egység sugarú kör középpontjától 8 egységnyi távolságra levő P pontból húzza meg a kör érintőit; az érintési pontokat jelölje A , illetve B . Számítsa ki az APB szög nagyságát, az AB szakasz hosszát, valamint a két érintő és az érintési pontok közé eső rövidebb AB ív által határolt síkidom területét.
69. Egy hegyesszögű háromszög két oldala 20 és 24 egység, a háromszög köré írható kör sugara 15 egység. Számítsa ki a háromszög szögeit és a harmadik oldal hosszát.
70. Egy rombusz oldala 12 egység hosszú, az egyik szöge 140° . Egyik hegyesszögének csúcsából két szelővel három egyenlő területű részre bontjuk a rombuszt. Mekkora egy-egy rész területe, és mekkora a szelőknek a rombuszba eső darabja?
71. Az r sugarú kör úgy helyezkedik el a R sugarú 2α középponti szögű körcíkben, hogy a körcík határoló körívet és mindkét sugarat érinti. Fejezzük ki r -et R -rel és α -val.
72. Egy egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek szinusza $\frac{5}{13}$. Táblázat alkalmazása nélkül számítsa ki a két szár által bezárt szög tangensét.
73. Az ABC háromszög oldalai természetes számok.
Legyen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b + c = 5a$ és a C csúcsnál fekvő szög 60° . Számítsa ki a legkisebb kerületű háromszög területét.
74. Egy háromszög három oldalának mindegyike kisebb 1-nél. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög területe kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
75. Egy háromszög egyik szöge 120° , az oldalak olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek különbsége 1. Mekkora a háromszög oldalai?
76. Mekkora az ABC háromszög szögei és ismeretlen oldala,
ha $AB = 10$, $BC = 8$ egység, és $BAC\angle = 30^\circ$.
77. Az $ABCD$ trapéz derékszögű; a derékszögű csúcsok A és B . A párhuzamos oldalak $AD = 15$, $BC = 24$ egység. A CD oldal felező merőlegese az AB oldalt olyan E pontban metszi, amelyre $AE = 20$ egység. Határozzuk meg a CED szög nagyságát.
78. Egy háromszög oldalainak aránya: $a : b : c = 4 : 5 : 6$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög legnagyobb szöge a legkisebb szögének kétszerese.
79. A derékszögű háromszög derékszögének szögfelezője f egység, amely az átfogót $4 : 7$ arányban osztja. Fejezzük ki f segítségével a háromszög oldalait.
80. Egy háromszög oldalai olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek különbsége 1. Legnagyobb szöge a legkisebb szögének kétszerese. Határozzuk meg a legkisebb szögének koszinuszát.
81. Az $ABCDE$ ötszög köré írható körének sugara egységnyi. Mekkora az ötszög területe, ha ismeretes, hogy $AB = \sqrt{2}$, $ABE\angle = 45^\circ$ és $BC = CD$, $DE = 1$.

82. A körbe írható $ABCD$ négyszög BD átlója a kör átmérője. Számítsuk ki az AC átló hosszát, ha ismeretes, hogy
 $BD = 2$, $AB = 1$, $ABD\angle : DBC\angle = 4 : 3$.
83. Egy szabályos n oldalú és egy szabályos $2n$ oldalú sokszög kerülete egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy területük aránya:
- $$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}.$$
84. Az ABC háromszög beírható körének sugara r , magasságvonalai m_a , m_b , m_c . Bizonyítsuk be, hogy
- $$\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}.$$
85. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai a és c , a szárai b és d ; az átlók hossza e és f . Bizonyítsuk be, hogy
- $$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$
86. Egy gúla alaplappja olyan paralelogramma, amelynek oldalai 10 és 18 egység, területe 90 területegység. A gúla magassága 6 egység és a magasság talppontja az alaplapp átlóinak metszéspontja. Mekkora a gúla oldalfelszíne?
87. Egy tetraéder oldalai $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{126}$. Ezek egymásra páronként merőlegesek. Mekkora a térfogata és az alaplapp területe?
88. Egy szabályos háromoldalú gúla oldaléle a egység; az oldalélek az alaplapp síkjával 60° – os szöget zárnak be. Fejezzük ki a – val a gúla felszínét és térfogatát.
89. Egy tetraéder alaplappja olyan derékszögű háromszög, amelynek átfogója c , befogóinak aránya $m : n$, az oldalélek hossza b . Számítsuk ki a térfogatát.
90. A szabályos négyoldalú csonka gúla alap és fedőéle 5 és 11 egység. A testátló hossza 12 egység. Mekkora az oldalfelszíne?
91. A kúp alapkörének és alkotójának az összege n , az alkotónak az alaplappsíkkal bezárt szöge α . Mekkora kúp felszíne?
92. Mekkora annak a szabályos háromoldalú gúlának a felszíne, amelynek a alapéle α szöget zár be az oldalélekkel.
93. Egy egyenes kúp felszíne S , alkotója α szöget zár be az alaplapp síkjával. Mekkora a kúp térfogata?
94. Valamely gúla alaplappja olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja a és az alapon fekvő szöge α . A gúla oldalélei β szöget zárnak be az alaplapp síkjával. Mekkora a gúla térfogata?
95. A szabályos háromoldalú gúla csúcsán és alapjának két oldalfelező pontján átmenő sík az alaplappal α szöget alkot; az alapél a . Mekkora a síkmetszet területe és a gúla térfogata?

96. Egy szabályos négyoldalú gúla szomszédos oldalélei α fokos szöget zárnak be egymással; az alapéle a egység. Az alap egyik átlóján keresztül olyan síkot fektetünk, amely merőleges ezt az átlót metsző egyik oldalélre. Mekkora területű síkidomot metsz ki ez a sík a gúlából?
97. A szabályos háromoldalú gúla oldalélén és magasságán átmenő síkmetszet területének a gúla felszínéhez való aránya k . Mekkora az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?