1. Egy derékszögű háromszög kerülete 40 egység, a két befogó összege 6-tal nagyobb, mint az átfogó. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás:

Jelölje a derékszögű háromszög befogóit a és b, az átfogóját c. Ekkor a feltétel szerint:

$$a+b=c+6, \quad \underbrace{a+b}_{c+6}+c=40$$

$$2c+6=40, \quad c=17.$$

Felírva a Pitagorasz tételt is, a befogók kiszámítására két egyenletet kapunk:

$$\begin{cases} a+b=23, \\ a^2+b^2=289. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=23, \\ \underbrace{(a+b)^2}_{23^2=529}-2ab=289, \quad \Rightarrow ab=20, \end{cases}$$

$$a(23-a)=120,$$

$$a^2-23a+120=0,$$

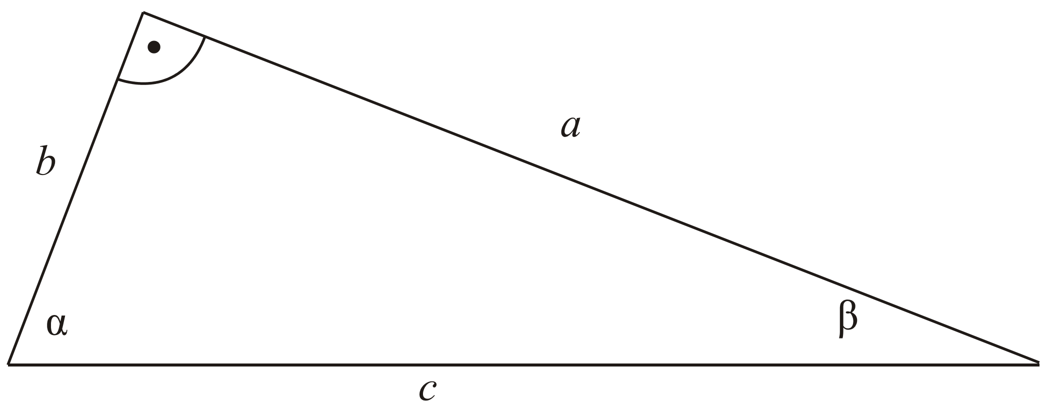
$$a_1=15, \; a_2=8, \; b_1=8, \; b_2=15.$$

Mivel a befogók szerepe felcserélhető, ezért az egyik befogó 15 egység, a másik 6 egység.

2. A derékszögű háromszög egyik befogója 15 egység, az átfogó és a másik befogó összege 25 egység. Határozzuk meg a háromszög oldalait, szögeit és területét.

Megoldás:

Használjuk a következő ábra jelöléseit és legyen adott a b oldal: b = 15.



$a + c = 25, \quad \Rightarrow \quad c = 25 - a, \quad c^2 = 625 - 50a + a^2$

$a^2 + 15^2 = 625 - 50a + a^2,$

$50a = 625 - 225 = 400, \quad a = 8, \quad c = 17.$

$T = \dfrac{15 \cdot 8}{2} = 60$ területegység.

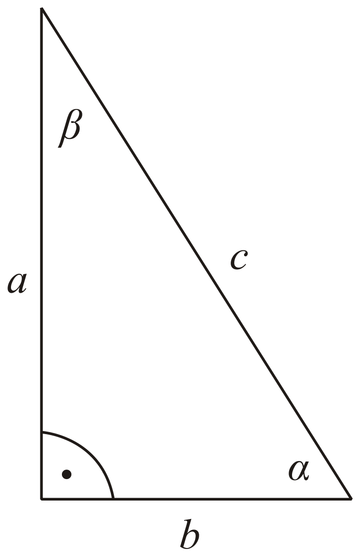
$tg\alpha = \dfrac{8}{15} = 0,5333, \qquad \alpha = 28,07^0,$

$\beta = 90^0 - 28,07^0 = 61,93^0.$

3. Egy derékszögű háromszög befogóinak különbsége 4 egység, a háromszög kerülete 45 egység. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

Megoldás:

Az ábra jelöléseit használva:



$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b + c = 48 \end{cases} \qquad \underbrace{a^2 + b^2}_{c^2} - 2ab = 16$$

$$a + b = 48 - c, \quad \underbrace{a^2 + b^2}_{c^2} + 2ab = 2304 - 96c + c^2$$

$$\begin{cases} 2ab = c^2 - 16 \\ 2ab = 2304 - 96c \end{cases}$$

$$c^2 - 16 = 2304 - 96c$$

$$c^2 + 96c - 2320 = 0$$

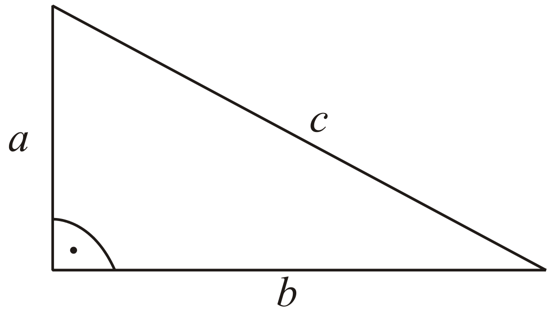
$c = -48 \pm \sqrt{2304 + 2320} = -48 \pm 68,$

$c = 20$

$sin\,\alpha = \dfrac{16}{20} = 0,8; \qquad \alpha = 53,13^0, \qquad \beta = 36,87^0.$

4. Egy derékszögű háromszög területe 140 terület egység, a három oldal mértékszámának szorzata 97440. Határozzuk meg a háromszög oldalait.

Megoldás:



Az ábra jelöléseit használva: $a < b$,

$$\begin{cases} a+b+c=140 \\ abc=97440 \end{cases}$$

$$a+b=140-c$$

$$\underbrace{a^2+b^2}_{c^2}+2ab=19600-280c+c^2$$

$$ab=9800-140c$$

$$(9800-140c)c=97440$$

$$980c-14c^2=9744$$

$$14c^2-980c+9744=0$$

$$c^2-70c+696=0$$

$$c=35\pm\sqrt{1225-696}=35\pm 23$$

$c_1=58,$ vagy $c_2=12.$

$c_1=58$ esetén:

$$ab=9800-140\cdot 58=1680$$

$$\begin{cases} ab=1680 \\ a+b=82 \end{cases}$$

$$b=82-a$$

$$a(82-a)=1680$$

$$a^2-82a+1680=0$$

$$a=41\pm\sqrt{1681-1680}=41\pm 1$$

$a_1=42,\ a_2=40,\ b_1=40,\ b_2=42,$

$c_2=12$ esetén:

$$ab=9800-140\cdot 12=8120$$

$$\begin{cases} ab=8120 \\ a+b=128 \end{cases}$$

$$b=128-a$$

$$a(128-a)=8120$$

$$a^2-128a+8120=0$$

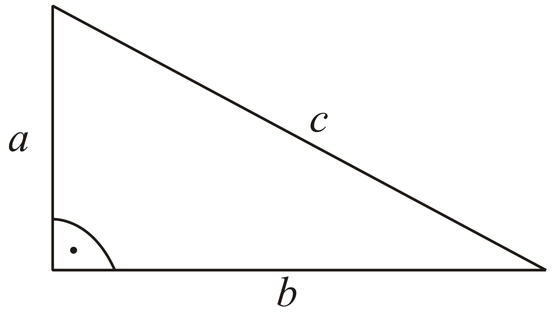
$$D=4096-8120<0$$

ekkor nincs valós gyök.

A háromszög oldalai: $a=40,\ \ b=42,\ \ c=58$ egység.

5. Egy derékszögű háromszög kerülete 70 egység, befogóinak szorzata 420. Számítsuk ki az oldalak hosszát!

Megoldás:



Az ábra jelöléseit használva: $a < b$,

$$\begin{cases} a+b+c=70 \\ ab=420 \end{cases}$$

$$a+b=70-c$$

$$\underbrace{a^2+b^2}_{c^2}+2ab=4900-140c+c^2$$

$$2\cdot 420=4900-140c$$

$$140c=4900-840=4060$$

$c=29.$

$$\begin{cases} ab=420 \\ a+b=41 \end{cases}$$

$b=41-a \qquad a(41-a)=420, \qquad a^2-4a+420=0$

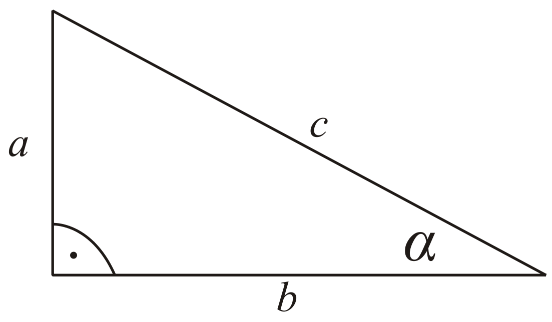
$$a=\frac{41\pm\sqrt{1681-1680}}{}2=\frac{41\pm 1}{2}$$

$a_1=21,\ \ a_2=20,\ \ b_1=20,\ \ b_2=21.$

A háromszög oldalai: $a=20, \quad b=21, \quad c=29$ egység.

6. Egy derékszögű háromszög kerülete 132 egység, az oldalak négyzeteinek összege 6050. Mekkorák az oldalai, szögei és a területe?

Megoldás:



Az ábra jelöléseit használva: $a < b$,

$$\begin{cases} a+b+c=70 \\ \underbrace{a^2+b^2}_{c^2}+c^2=6050 \end{cases}$$

$$2c^2=6050, \quad c^2=3025, \quad c=55.$$

$$\begin{cases} a+b=7 & \Rightarrow \quad b=7-a \\ a^2+b^2=3025 \end{cases}$$

$$a^2+(7-a)^2=3025$$

$$a^2+49-14a+a^2-3025=0$$

$$a^2-77a+1452=0$$

$$a=\frac{77\pm\sqrt{5929-5808}}{2}=\frac{77\pm 11}{2}$$

$$a_1=44, \quad a_2=33, \quad b_1=33, \quad b_2=44.$$

A háromszög oldalai: $a=33, \quad b=44, \quad c=55$ egység.

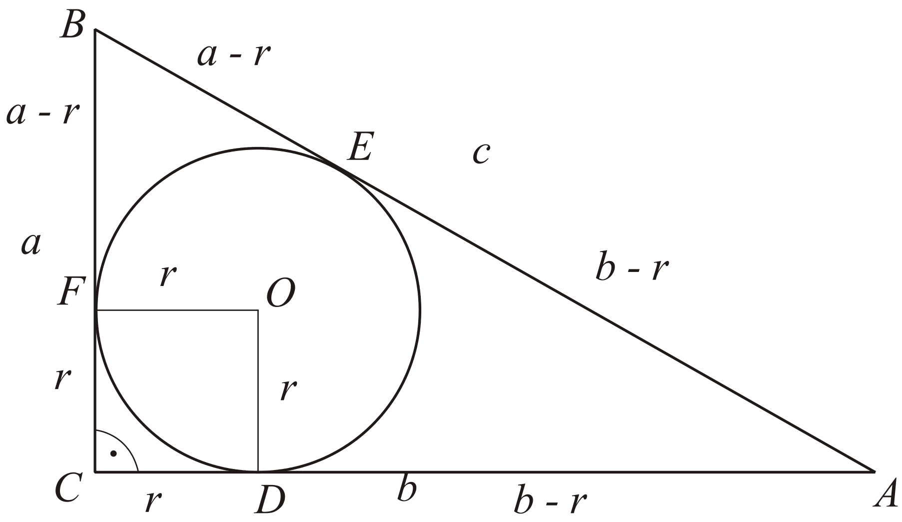
A háromszög területe: $t=\frac{33\cdot 44}{2}=726$ területegység.

A háromszög szögei:

$$sin\,\alpha=\frac{33}{55}, \quad \alpha=36,87^0, \quad \beta=53,113^0.$$

7. Valamely derékszögű háromszög egyik befogója 369 egység, beírható körének sugara 117 egység. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit az alábbi adatokkal: $b = 396, \quad r = 117$

A körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt az ábráról leolvasható, hogy $c = a + b - 2r = a + 162.$

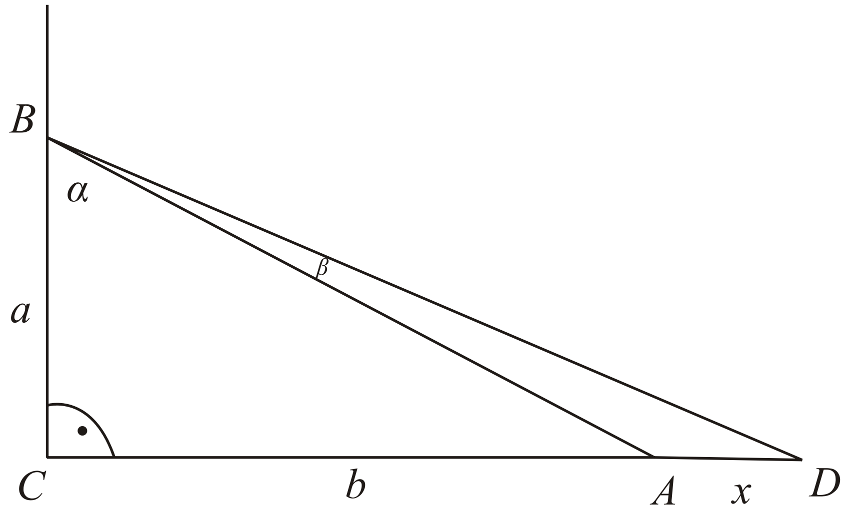
Alkalmazva a Pitagorasz tételét:

$$a^2 + b^2 = \left(a + 162\right)^2$$
$$a^2 + 396^2 = a^2 + 324a + 162^2$$
$$324a = 396^2 - 162^2 = 130572$$
$$a = 403, \quad c = 565.$$

Tekintettel arra, hogy $403^2 + 396^2 319225 = 565^2$ a Pitagorasz tétel megfordítása értelmében a háromszög derékszögű.

8. Egy folyó partjától 45 méter távolságra van egy 20 méter magas torony, melynek 18 méter magasan lévő ablakából a folyó két szemközti partja 12^0 alatt látszik. Milyen széles a folyó?

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit az alábbi adatokkal: $a = 18, \quad b = 45, \quad \beta = 12^0$.

$tg\alpha = \frac{45}{18} = 2,5 \qquad \alpha = 68,2^0, \qquad \alpha + 12^0 = 80,2^0$

$\frac{x+45}{18} = tg\left(\alpha + 12^0\right) = tg80,2^0$

$x + 45 = 18 \cdot tg80,2^0$

$x = 18 \cdot tg80,2^0 - 45 = 59,2.$

A folyó 59,2 *m* széles.

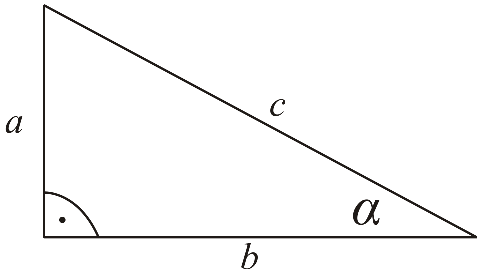
9. Egy háromszög legkisebb oldala 12 egység és a három oldal aránya 3:4:5. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás:

Legyenek az adatok a következők: $a = 12, \quad a:b:c = 3:4:5$.

Az arányokból a háromszög másik két oldala: $b = 16, \quad c = 20$.

Tekintettel arra, hogy $12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$, a Pitagorsz tétel megfordításának értelmében a háromszög derékszögű.



$$\sin\alpha = \frac{12}{20} = 0,6 \qquad \alpha = 36,87^0, \quad \beta = 53,1^0.$$

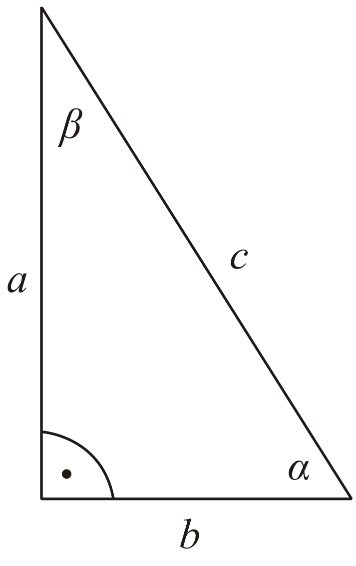
10. Egy háromszög oldalaira $a^2 + b^2 = 4, \quad a^2 - b^2 = 2, \quad b:c = 1:2$. Határozzuk meg a háromszög oldalait, szögeit, területét és beírható körének sugarát.

Megoldás:

Összeadva a két egyenletet, kiszámolhatjuk a értékét: $2a^2 = 6, \quad a^2 = 3, \quad a = \sqrt{3}.$.

a értékének felhasználásával $b = 1, \quad c = 2$.

Mivel $a^2 + b^2 = c^2$, ezért a Pitagorasz tétel megfordítása miatt a háromszög derékszögű.



Látható, hogy ha az a oldalra tükrözzük a háromszöget, akkor szabályos háromszöghöz jutunk, ezért

$\alpha = 60^0, \quad \beta = 30^0.$

$$t = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Ha r jelöli a beírt kör sugarát, akkor ismert, hogy derékszögű háromszög esetén

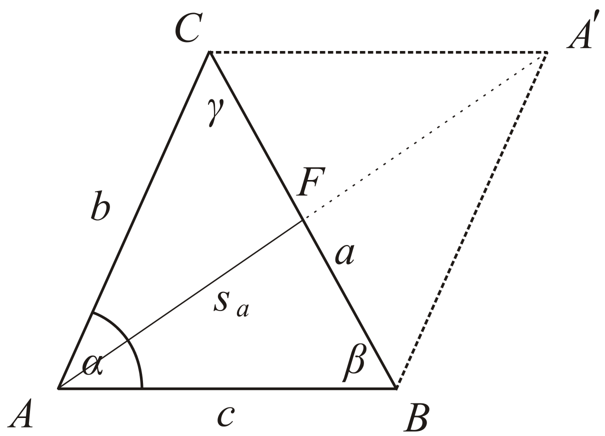
$c = a + b - 2r$. Ezért

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1 - 2}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 0,37.$$

11. Adott egy háromszög két oldala: $b = 26, \quad c = 22$ egység, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal $s_a = 13,416$ egység. Határozzuk meg a hiányzó oldalt és számítsuk ki a szögeit.

Megoldás:

Tükrözzük a háromszöget az oldalfelező pontra, akkor tudjuk, hogy paralelogrammát kapunk.



Ismert, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő, ezért:

$$2s_a^2 + a^2 = 2\left(b^2 + c^2\right)$$

$$26,832^2 + a^2 = 2\left(26^2 + 22^2\right)$$

$$a^2 = 1600,04 \approx 1600, \quad a = 40.$$

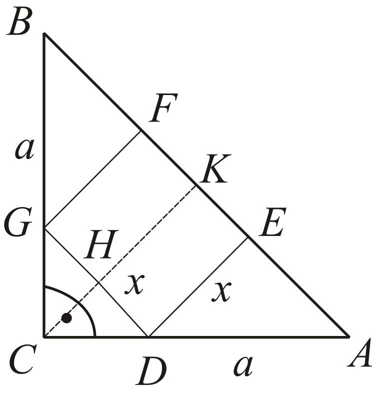
$$40^2 = 22^2 + 26^2 - 2 \cdot 22 \cdot 26 \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1160 - 1600}{44 \cdot 26} = -\frac{440}{44 \cdot 26} \approx -0,3846, \quad \alpha = 112,62^0.$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{26}{40} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{26\sin\alpha}{40} \approx 0.5999, \quad \beta = 36,87^0, \quad \gamma = 30,51^0.$$

12. Az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögbe minden lehetséges módon írjunk négyzeteket. Számítsuk ki a négyzet oldalát.

Megoldás:



Nyilvánvaló, hogy

$CDG_\triangle \sim CAB_\triangle$, ezért

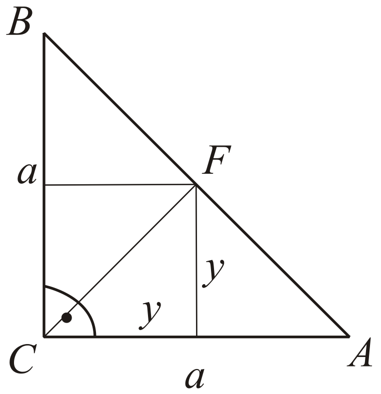
$$\frac{DG}{AB}=\frac{CH}{CK} \Rightarrow \frac{x}{a\sqrt{2}}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-x\right):\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{ax\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-x\right)$$

$$\frac{x}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}-x, \quad \frac{3x}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad x=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Ebben az esetben a négyzet területe: $t=x^2=\frac{2a^2}{9}$.

A négyzetet elhelyezhetjük a következő módon is:



Alkalmazzuk a Pitagorasz tételt:

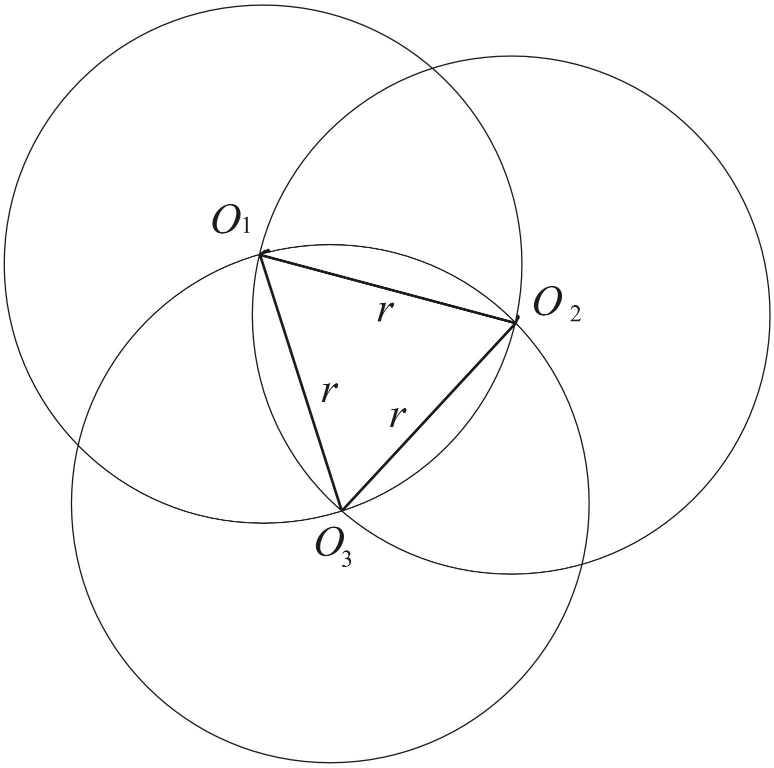
$$y^2+y^2=CF^2, \quad 2y^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$y^2=\frac{a^2}{4}.$$

A négyzet területe ekkor: $\frac{a^2}{4}$.

13. Három kör közül mindegyik átmegy a másik kettő középpontján. Mekkora a három kör közös részének a területe?

Megoldás:



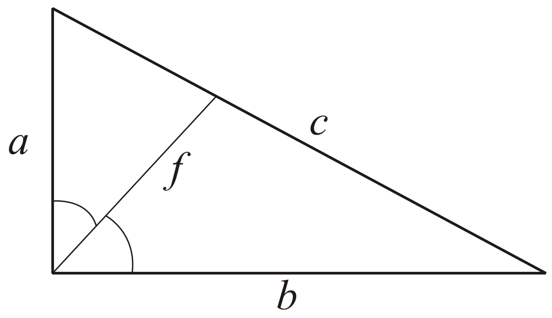
Az $O_1O_2O_3\triangle$ háromszög szabályos, így a keresett területet megkapjuk, ha három 60^0-os körcikk $\left(O_1, O_2, O_3\right.$ csúcsú körcikkek$\left.\right)$ területének összegéből kivonjuk az $O_1O_2O_3\triangle$ területét!

Tekintettel arra, hogy a 3 körcikk területének összege a félkör területe, ezért:

$$t = \frac{r^2\pi}{2} - \frac{r^2\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) \approx 0,7r^2.$$

14. Adottak egy derékszögű háromszög befogói: $a = 3,6$ és $b = 4,5$. Számítsa ki a szögfelezők hosszát.

Megoldás:



Legyen $a = 3,6$ és $b = 4,5$.

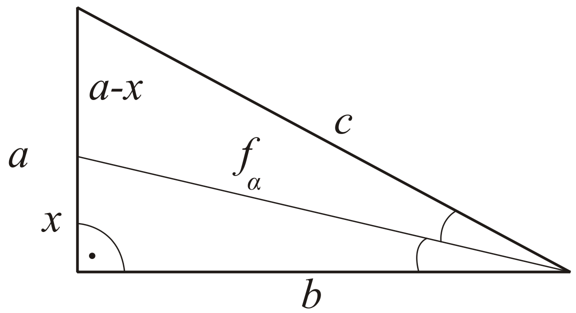
Írjuk fel a háromszög területét a két kisebb háromszög területének összegeként!

$$\frac{e \cdot f \sin 45^0}{2} + \frac{b \cdot f \sin 45^0}{2} \frac{a \cdot b}{2},$$

$$f\sqrt{2}\left(3,6+4,5\right) = 3,6 \cdot 4,5$$

$$f\sqrt{2} \cdot 8,1 = 16,2 \qquad f = 2\sqrt{2}$$

A c oldal Pitagorsz tétel segítségével kiszámolható: $c^2 = 3,6^2 + 4,5^2 = 33,21 \quad c = 5,76$.



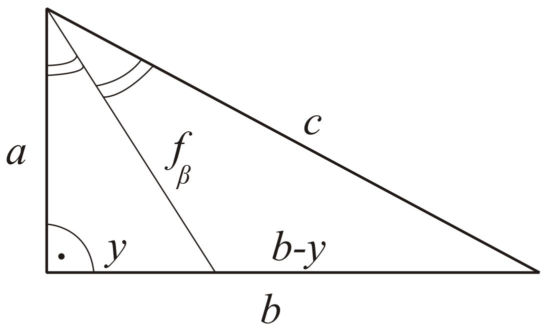
A szögfelező tételt használjuk:

$$\frac{x}{3,6-x} = \frac{4,5}{5,76}$$

$$5,76x = 16,2 - 4,5x$$

$$x = 1,58$$

$$f_\alpha^2 = 4,5^2 + 1,58^2 = 22,7464, \quad f_\alpha = 4,77.$$



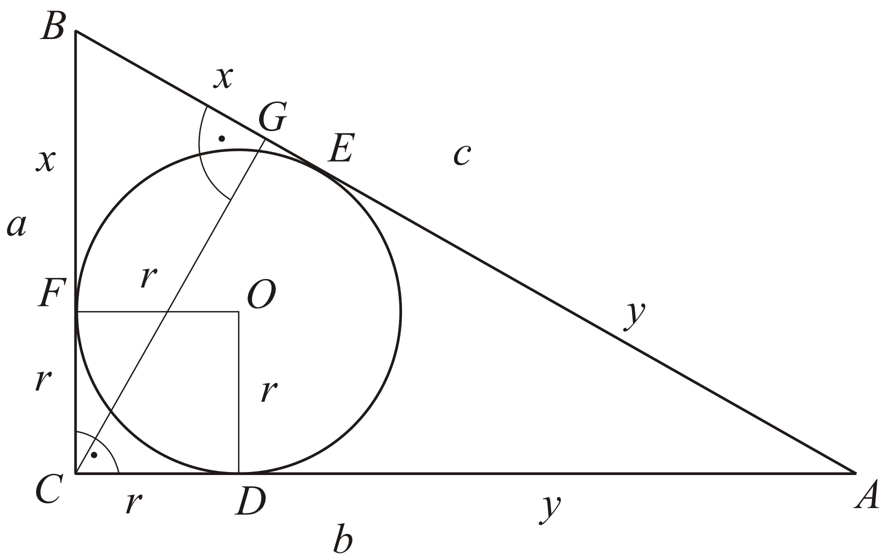
$$\frac{y}{4,5-y} = \frac{3,6}{5,76}, \qquad 5,76y = 3,6\left(4,5-y\right)$$

$$9,36y = 16,2 \qquad y = 1,73$$

$$f_\beta^2 2 = 3,6^2 + 1,73 \ = 15,9529 \qquad f\beta = 3,99.$$

15. Adott a derékszögű háromszög beírható körének sugara: $r = 65$ egység, az átfogóhoz tartozó magasság 154 egység. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás:



Írjuk fel a háromszögre a Pitagorasz tételt és a háromszög kétszeres területét kétféle módon:

$$\left.\begin{aligned}(x+65)^2+(y+65)^2&=(x+y)^2\\(x+y)154&=(x+65)(y+65)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x^2+130x+4225+y^2+130y+4225&=x^2+2xy+y^2\\154(x+y)&=xy+65(x+y)+4225\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}130(x+y)+2\cdot 4225&=2xy\\89(x+y)&=xy+4225\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}65(x+y)+4225&=xy\\89(x+y)-4225&=xy\end{aligned}\right\}\Rightarrow 65(x+y)+4225=89(x+y)-4225$$

$$24(x+y)=2\cdot 4225, \quad \Rightarrow \quad x+y=352 \quad \Rightarrow \quad xy=65\cdot 352+4225.$$

$$x+y=352, \quad xy=27105$$

$$y=352-x, \quad x(352-x)=27105$$

$$x^2-352x+27105=0$$

$$x=176\pm\sqrt{176^2-27105}=176\pm\sqrt{3871}=176\pm 62{,}22$$

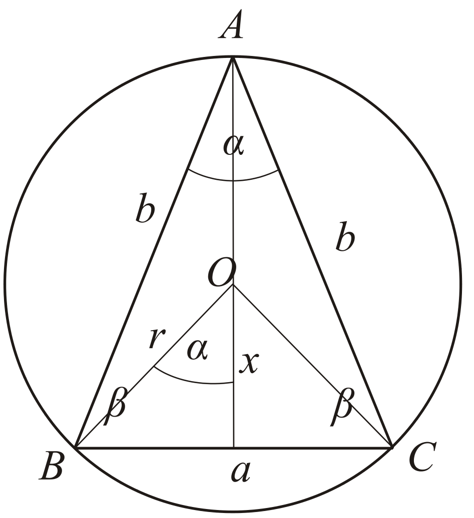
$$x_1=238{,}22 \quad x_2=113{,}78$$

$$y_1=113{,}78 \quad {}_2=238{,}22.$$

Mivel rajzunk szerint $a<b$, ezért $a=178{,}78;\ b=303{,}22;\ c=352$.

16. Adott az egyenlős szárú háromszög alapja $a = 126$ egység, a köréírható kör sugara $r = 6{,}25$ egység. Számítsa ki a szárát, a szögeket és a háromszög területét.

Megoldás:



$$a = 12, \quad r = 6{,}25$$

$$a = 2r\,sin\,\alpha$$

$$sin\,\alpha = \frac{12}{13}, \quad \alpha = 67{,}38^0 \quad \beta = 56{,}31^0$$

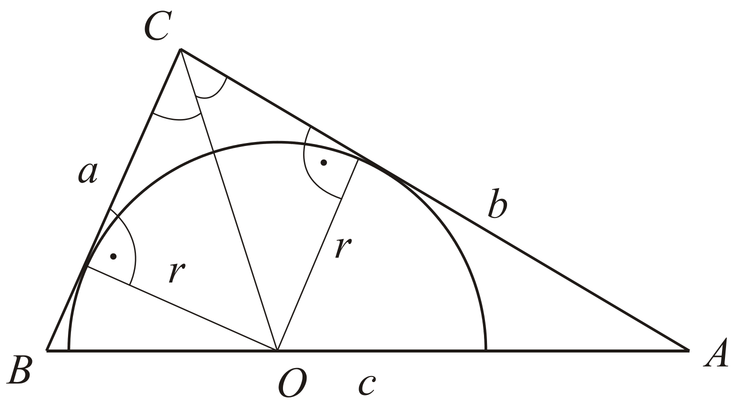
$$x^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 - 6^2 = \frac{625-576}{16} = \frac{49}{16}, \quad x = \frac{7}{4},$$

$$m = \frac{25}{4} + \frac{7}{4} = \frac{32}{4} = 8,$$

$$t = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ területegység.}$$

17. Egy háromszög oldalai: $a = 13, \quad b = 14, \quad c = 15$ egység. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja a c oldalon van és érinti a másik két szárat?

Megoldás:



A háromszög kerülete: $k = 2s = a + b + c = 13 + 14 + 15 = 42, \quad s = 21.$

A Heron-képlet szerint a háromszög területe: $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$.

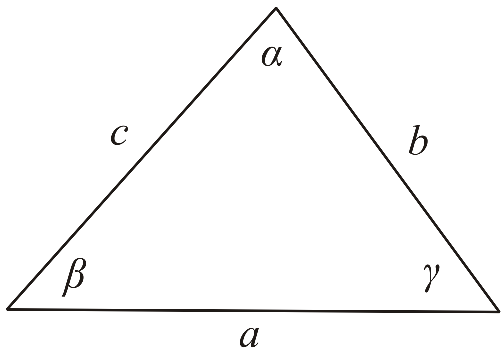
Másrészt a terület felírható r segítségével is:

$$t = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{(a+b)r}{2} = \frac{27r}{2} = 84,$$

$$r = \frac{2 \cdot 84}{27} = \frac{56}{9} \approx 6,22 \text{ egység.}$$

18. Valamely háromszög oldalaira: $a+b+c=123,\ b+c=78,\ a+c=85$. Számítsuk ki a háromszög szögeit, területét és beírható körének sugarát.

Megoldás:



$a=123-(b+c)=123-78=45,\quad c=40,\quad b=38.$

A területet a Heron képlettel számoljuk ki:

$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\frac{123}{2}\cdot\frac{33}{2}\cdot\frac{47}{2}\cdot\frac{43}{2}}\approx 716,032.$$

$t=r\cdot s$ alapján $r=\frac{t}{s}=\frac{716,032\cdot 2}{123}\approx 11,64.$

Jelölje m_a az a oldalhoz tartozó magasságot, ekkor $m_a=\frac{2t}{a}\approx 31,82.$

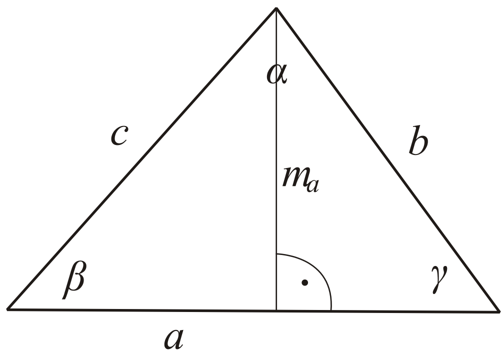
Mivel az a oldal a legnagyobb, ezért a β és γ csak hegyes szög lehet.

$$sin\,\beta=\frac{m_a}{c}\approx 0,7955\quad \beta=52,7^0$$

$$sin\,\gamma=\frac{m_a}{b}\approx 0,8374\quad \gamma=56,87^0,\quad \alpha=70,43^0.$$

19. Valamely háromszögben egyik oldal úgy aránylik a hozz tartozó magassághoz, mint 10 : 3, a másik két oldal szorzata 482, a háromszög területe 240 terület egység. Számítsuk ki a háromszög oldalait és szögeit.

Megoldás:



A feltétel szerint: $a;m_a = 10:3, \quad bc = 481, \quad t = 240.$

Az arányokból felírható, hogy $a = 10x, \ m_a = 3x$, ezek felhasználásával írjuk fel a háromszög területét:

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{30x^2}{2} = 240, \quad x^2 = \frac{480}{30} = 16, \quad x = 4.$$

Így $a = 40, \ m_a = 12$.

$$t = \frac{b \cdot c \sin\alpha}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{2t}{bc} = \frac{480}{481} \approx 0,9979 \quad \alpha = 86,10^0.$$

A háromszög *b* és *c* oldalára adott egy egyenlet, egy másikat kapunk, ha felírjuk a koszinusz tételt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Pontos értékkel akarunk számolni, ezért $\cos\alpha$ -t kiszámoljuk: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{480}{481}\right)^2 = \frac{961}{481^2}, \quad \cos\alpha = \frac{31}{481}.$

$$1600 = b^2 + c^2 - 2 \cdot 481 \cdot \frac{31}{481}, \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = 1662.$$

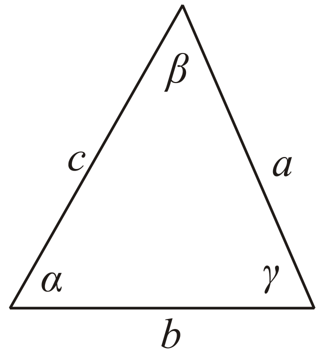
$$\left.\begin{array}{l} 2bc = 962 \\ b^2 + c^2 = 1662 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (b+c)^2 = 2624 \\ (b-c)^2 = \ 700 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} b+c = 8\sqrt{41} \\ b-c = 10\sqrt{7} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} b = 4\sqrt{41} + 5\sqrt{7} \\ c = 4\sqrt{41} - 5\sqrt{7} \end{array}\right\}$$

$b \approx 38,84 \qquad c = 12,38$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{38,84 \sin 86,1^0}{40} \approx 0,96896 \quad \beta = 75,69^0 \quad \gamma = 18,21^0.$$

20. Egy hegyesszögű háromszögben $a+b=13$, $a^2+b^2=89$ és a háromszög területe $t=19$ terület egység. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

Megoldás:



Legyen $b \le a$, $a+b=13$, $\Rightarrow$ $a^2+2ab+b^2=169$ $\Rightarrow$ $ab=40$.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=13 \\ ab=40 \end{array}\right\}, \quad \Rightarrow \quad a=8, \quad b=5.$$

$$t=\frac{ab\sin\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma=\frac{2t}{ab}=\frac{19}{20}, \quad \gamma=71{,}81^0.$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=64+25-80\cos 71{,}81\approx 64, \quad c=8.$$

$$\alpha\approx 71{,}81 \quad \beta=36{,}38^0.$$

21. Egy háromszög oldalai az alábbi egyenletrendszer gyökei:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=\frac{43}{60} & (1) \\ \frac{1}{x}-\frac{2}{y}=-\frac{1}{6} & (2) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{47}{60} & (3) \end{array}\right\}$$

Számítsuk ki a háromszög szögeit és területét.

Megoldás:

A (3) – as egyenletet szorozzuk meg 4-gyel és vonjuk ki a kapott egyenletből (1) – et:

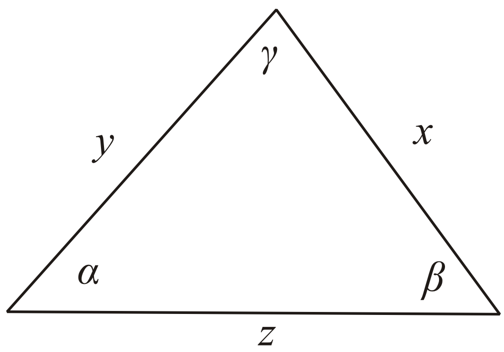
$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}=\frac{188}{60} \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=\frac{43}{60} \end{array}\right\} \qquad \frac{2}{x}+\frac{7}{y}=\frac{145}{60}=\frac{29}{12}$$

A kapott egyenlethez vegyük hozzá a (2) egyenletet kétszeresét:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x}+\frac{7}{y}=\frac{29}{12} \\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{4}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{11}{y}=\frac{33}{12}=\frac{11}{4} \quad \Rightarrow \quad y=4.$$

Ezek után a további oldalak könnyen adódnak: $x=3, \quad z=5$.

A Pitagorasz tétel megfordítása miatt a háromszög derékszögű.



A háromszög területe: $t=\frac{3\cdot 4}{2}=6$ terület egység.

$sin\,\alpha=\frac{3}{5}, \quad \alpha=36{,}87^0, \quad \beta=53{,}13^0.$

22. Egy háromszög területe $t=3$ területegység; egyik oldala $a=1,5$ egység; a beírható körének sugara $r=0,5$ egység. Számítsa ki a hiányzó oldalakat, szögeket, valamint az oldalakat kívülről érintő körök sugarát.

Megoldás:

A $t=r\cdot s$ összefüggésből a félkerület, így a kerület is számítható:

$$s=\frac{t}{r}=\frac{3}{0,5}=6,\quad a+b+c=12,\quad b+c=12-1,5=10,5.$$

b – re és c –re egy másik egyenletet is kaphatunk a Heron képlet felhasználásával:

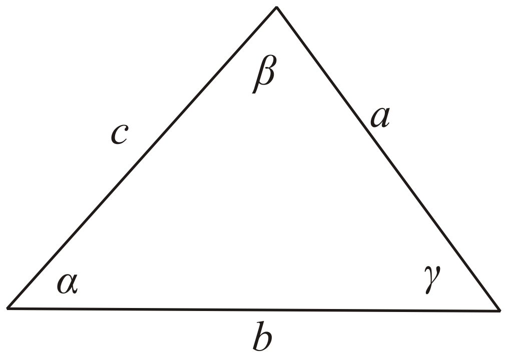
$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\qquad 3=\sqrt{6\cdot 4,5(6-b)(6-c)}$$

$$9=27(36-6b-6c+bc)\qquad 1=3\left[36-6(b+c)+bc\right]=3(36-63+bc)$$

$$bc-27=\frac{1}{3},\quad bc=\frac{82}{3}.$$

$$\left.\begin{aligned}b+c&=10,5\\ bc&=\frac{82}{3}\end{aligned}\right\}\quad b(10,5-b)=\frac{82}{3},\qquad 3b^2-31,5b+82=0,$$

$$b=\frac{31,5\pm\sqrt{992,25-984}}{6}=\frac{31,5\pm 2,87}{6},\quad b=5,73\quad c=4,77.$$



A hozzáírt körök sugarait az $r_a=\dfrac{t}{s-a},\quad r_b=\dfrac{t}{s-b},\quad r_c=\dfrac{t}{s-c}$ képletek alapján számoltuk:

$$r_a=\frac{2}{3},\quad r_b=\frac{100}{9},\quad r_c=2,44.$$

$$5,73^2=1,5^2+4,77^2-2\cdot 1,5\cdot 4,77\cos\beta\quad\Rightarrow\quad \cos\beta=-0,5472\quad \beta=123,17^0.$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1,5}{7,73}\quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=0,2191\quad \alpha=12,66^0,\quad \beta=44,17^0.$$

23. Egy háromszög oldalai egymást követő természetes számok. A terület mértékszáma a kerület mértékszámának kétszerese. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás:

Legyen a háromszög három oldala $a-1,\ a,\ a+1$, ahol $a \in \mathbb{Z}^+$.

Ekkor a háromszög kerülete: $k = 3a$. Használni fogjuk a Heron képletet, felhasználva, hogy a félkerület: $s = \frac{3a}{2}$.

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}+1\right) \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}-1\right)} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{4}-1\right)}$$

$$6a = \sqrt{\frac{3a^2}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{4}-1\right)},$$

$$36a^2 = \frac{3a^2}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{4}-1\right),$$

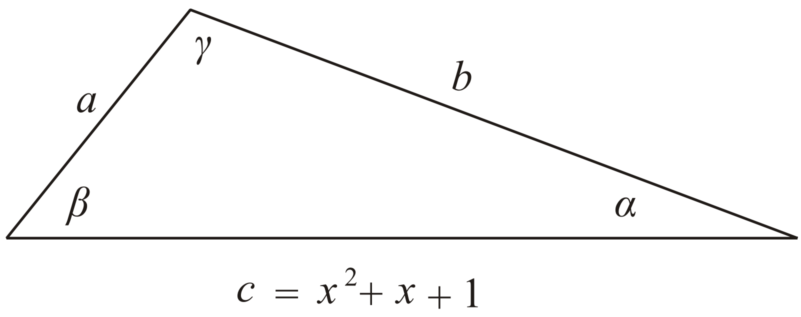
$$48 = \frac{a^2}{4} - 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{4} = 49, \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4 \cdot 49, \quad \Rightarrow \quad a = 14.$$

A háromszög oldalai: 13; 14 és 15 egység.

24. Egy háromszög oldalai: $x^2+x+1,\ 2x+1,\ x^2-1,$ ahol $x>1$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögnek van 120^0 - os szöge. Számítsuk ki a másik két szöget is, ha $x=4,5$.

Megoldás:

Kövessük az ábra jelöléseit, ahol legyen $a=2x+1,\ b=x^2-1,\ c=x^2+x+1.$



A feltétel miatt a legnagyobb oldal x^2+x+1, ezért a γ szöget számoljuk ki. Ehhez alkalmazzuk a koszinusz tételt.

$$\left(x^2+x+1\right)^2=\left(2x+1\right)^2+\left(x^2-1\right)^2-2\left(2x+1\right)\left(x^2-1\right)cos\,\gamma$$

$$2\left(2x+1\right)\left(x^2-1\right)cos\,\gamma=\left(2x+1\right)^2+\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2+x+1\right)^2$$

$$2\left(2x+1\right)\left(x^2-1\right)cos\,\gamma=\left(2x+1\right)^2+\left(2x^2+x\right)\left(-x-2\right)$$

$$2\left(2x+1\right)\left(x^2-1\right)cos\,\gamma=\left(2x+1\right)^2-x\left(2x+1\right)\left(x+2\right)$$

$$2\left(2x+1\right)\left(x^2-1\right)cos\,\gamma=\left(2x+1\right)\left(2x+1-x^2-2x\right)$$

$$2\left(2x+1\right)\left(x^2-1\right)cos\,\gamma=\left(2x+1\right)\left(1-x^2\right)$$

$$cos\,\gamma=-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\gamma=120^0.$$

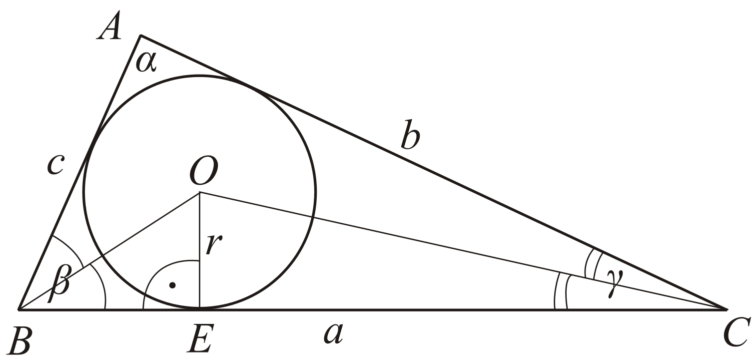
Ha $x=4,5$, akkor $c=4,5^2+4,5+1=25,75;\ a=10;\ b=19,25.$

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\gamma}=\frac{a}{c}\quad\Rightarrow\quad sin\,\alpha=\frac{10\cdot sin120^0}{25,75}=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 25,75}=\frac{\sqrt{3}}{5,15}\approx 0,3363$$

$\alpha=19,65^0$ és $\beta=40,35^0$.

25. Adott az ABC háromszögben $BC = 17$; $\beta = ABC\measuredangle = 54^0$; a beírható kör sugara $r = 3,5$. Számítsuk ki a hiányzó oldalakat és szögeket.

Megoldás:



Ismert, hogy az s félkerülettel és az oldalakkal az érintőszakaszok kiszámíthatók, mely szerint

$$EC = s - a, \quad BE = s - b.$$

$$tg\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b} \quad \Rightarrow \quad s - b = \frac{3,5}{tg 27^0} \approx 6,87 \quad \Rightarrow \quad s - c = 17 - 6,87 = 10,13.$$

$$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{3,5}{10,13} \approx 0,3455 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{2} = 19,06^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 38,12^0.$$

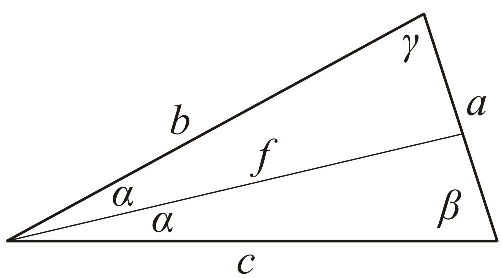
$$\alpha = 180^0 - \left(54^0 38,12^0\right) = 87,88^0$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{17 \cdot \sin 54^0}{\sin 87,88^0} \approx 13,76$$

$$\frac{c}{17} = \frac{\sin 38,12^0}{\sin 87,88^0} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{17 \cdot \sin 38,12^0}{\sin 87,88^0} \approx 10,50.$$

26. Ismeretes, hogy valamely háromszögben $a = 126,\ b + c = 586$ és az A csúcsnál lévő szög felezőjének hossza 285 egység. Számítsuk ki az ismeretlen oldalakat és szögeket.

Megoldás:



Az ábra szerinti jelölésekkel az adatok: $a = 126,\ b + c = 586,\ f = 285$.

$$b + c = 586 \quad \Rightarrow \quad b^2 + 2bc + c^2 = 586^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = 586^2 - 2bc$$

A hiányzó adatok kiszámításához $(b,\ c,\ \alpha)$ még két egyenletre van szükségünk. Egyet kapunk a koszinusz tétel felírásával, a másikat pedig a terület kétféle módon történő felírásával:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\alpha \\ \dfrac{bc\sin 2\alpha}{2} = \dfrac{c\cdot f\sin\alpha}{2} + \dfrac{b\cdot f\sin\alpha}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 126^2 = 586^2 - 2bc - 2bc\cos 2\alpha \\ 2bc\sin\alpha\cos\alpha = f(b+c)\sin\alpha \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2bc(1+\cos 2\alpha) = 586^2 - 126^2 \\ 2bc\sin\alpha\cos\alpha = 285\cdot 586\sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2bc(1+\cos 2\alpha) = (586+126)(586-126) \\ bc\cos\alpha = 83505 \end{array}\right\}$$

$$bc(1+\cos 2\alpha) = 163760$$

$$\frac{bc(1+\cos 2\alpha)}{bc\cos\alpha} = \frac{163760}{83505} \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{163760}{83505}$$

$$\frac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{163760}{83505} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{81880}{83505} \approx 0,9805 \quad \alpha = 11,32^0 \quad 2\alpha = 22,64^0.$$

$$bc = \frac{83505}{\cos\alpha} = \frac{83505}{0,9805} = 85166$$

$\left.\begin{array}{l} b+c = 586 \\ bc = 85166 \end{array}\right\}$ Az egyenletrendszer b - ben és c – ben szimmetrikus, legyen $b \ge c$.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján b és c gyöke a következő egyenletnek:

$$z^2 - 586z + 85166 = 0 \quad z = 293 \pm \sqrt{293^2 - 85166} = 293 \pm 26,13$$
$$z_1 = 319,13 = b \quad z_2 = 266,87 = c.$$

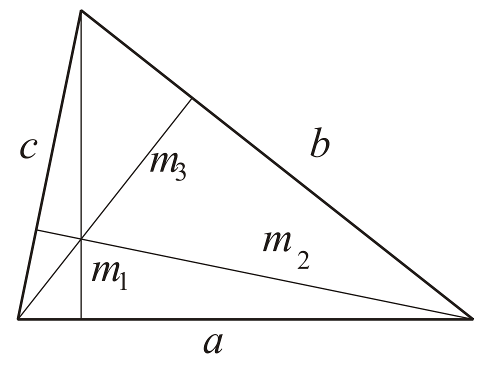
Ha most az egyik szöget a szinusz tétellel akarjuk kiszámolni, akkor vigyázni kell, hogy melyiket számoljuk! Tekintettel arra, hogy $b > c$ hiányzó két szög közül célszerű a kisebbiket $(\gamma$ - át$)$ kiszámolni, mert az biztosan hegyesszög.

$$\frac{\sin\gamma}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{266,87\sin 22,64^0}{126} \approx 0,8153$$
$$\gamma = 54,62^0 \quad \beta = 180^0 - (22,64 + 54,62) = 102,74.$$

27. Ismeretes egy háromszög három magassága: $m_1 = 24,\ m_2 = 27,\ m_3 = 32$. Számítsuk ki a háromszög területét és az oldalait.

a) Ismeretes egy háromszög három magassága: $m_1 = 24,\ m_2 = 27,\ m_3 = 32$. Számítsuk ki a háromszög területét az oldalak és szögek kiszámítása nélkül.

Megoldás:



A megoldáshoz a Heron képletet fogjuk használni, ezért felírjuk az abban szereplő adatokat:

$$T=\frac{a\cdot m_1}{2}=\frac{b\cdot m_2}{2}=\frac{c\cdot m_3}{2}\quad\Rightarrow\quad a=\frac{2T}{m_1}\quad b=\frac{2T}{m_2}\quad c=\frac{2T}{m_3}$$

$$a+b+c=2s=2T\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)\quad\Rightarrow\quad s=T\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{27}+\frac{1}{32}\right)$$

$$s=T\cdot\frac{27\cdot32+24\cdot32+24\cdot27}{24\cdot27\cdot32}=\frac{2280T}{24\cdot27\cdot32}=\frac{95T}{27\cdot32}$$

$$s-a=T\cdot\left(-\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)=T\cdot\frac{-27\cdot32+24\cdot32+24\cdot27}{24\cdot27\cdot32}=\frac{552T}{24\cdot27\cdot32}$$

$$s-b=T\cdot\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)=T\cdot\frac{27\cdot32-24\cdot32+24\cdot27}{24\cdot27\cdot32}=\frac{744T}{24\cdot27\cdot32}$$

$$s-c=T\cdot\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_3}\right)=T\cdot\frac{27\cdot32+24\cdot32-24\cdot27}{24\cdot27\cdot32}=\frac{984T}{24\cdot27\cdot32}$$

$$T^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{95\cdot23\cdot31\cdot41\cdot T^4}{(27\cdot32)^4}$$

$$T^2=\frac{(27\cdot32)^4}{95\cdot23\cdot31\cdot41}\quad\Rightarrow\quad T=\frac{(27\cdot32)^2}{\sqrt{95\cdot23\cdot31\cdot41}}=\frac{746496}{\sqrt{2777135}}\approx447{,}95$$

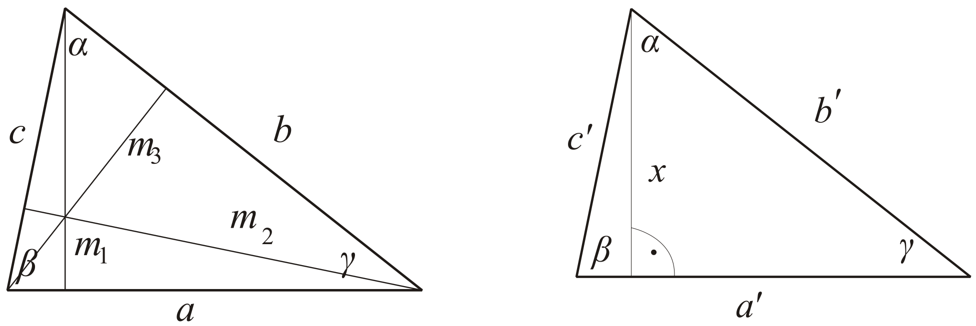
b) Ismeretes egy háromszög három magassága: $m_1=24,\ m_2=27,\ m_3=32$. Számítsuk ki a háromszög területét, szögeit, oldalait.

Megoldás:

Alakítsuk át az $a\cdot m_1=b\cdot m_2=c\cdot m_3$ egyenletrendszert:

$$\frac{a}{b}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{\frac{1}{m_1}}{\frac{1}{m_2}},\qquad \frac{a}{c}=\frac{m_3}{m_1}=\frac{\frac{1}{m_1}}{\frac{1}{m_3}},\qquad \frac{b}{c}=\frac{m_3}{m_2}=\frac{\frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_3}}.$$

Utóbbiak azt jelentik, hogy az *a, b, c* oldalú háromszög hasonló az $\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}$ oldalú háromszöggel, utóbbi pedig az $a' = \frac{k}{m_1}, b' = \frac{k}{m_2}, c' = \frac{k}{m_3}$ oldalú háromszögggel, ahol *k* alkalmasan választott konstans. A hasonló háromszögek megfelelő szögei egyenlők, így az a', b', c' oldalú háromszögből fogjuk kiszámítani a szögeket, a *k* értékét pedig úgy választjuk meg, hogy az oldalak egész számok legyenek, azaz $m_1 = 24,\ m_2 = 27,\ m_3 = 32$ legkisebb közös többszörösének. $k = 27 \cdot 32$, így $a' = 36,\ b' = 32,\ c' = 27$.



$$\left(a'\right)^2 = \left(b'\right)^2 + \left(c'\right)^2 - 2 \cdot b' \cdot c' \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{32^2 + 27^2 - 36^2}{2 \cdot 32 \cdot 27} = \frac{457}{1728} \approx 0,2645 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 74,66^0.$$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{27}{36} \quad \Rightarrow \sin\gamma = \frac{27 \cdot \sin 74,66^0}{36} \approx 0,7233, \quad \gamma = 46,33^0, \quad \beta = 59,01^0.$$

Ezek után az oldalakat az eredeti háromszögből számoljuk:

$$\sin\beta = \frac{m_1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{m_1}{\sin\beta} = \frac{24}{\sin 59,01^0} \approx 28,$$

$$\sin\gamma = \frac{m_1}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{m_1}{\sin\gamma} = \frac{24}{\sin 46,33} \approx 33,12$$

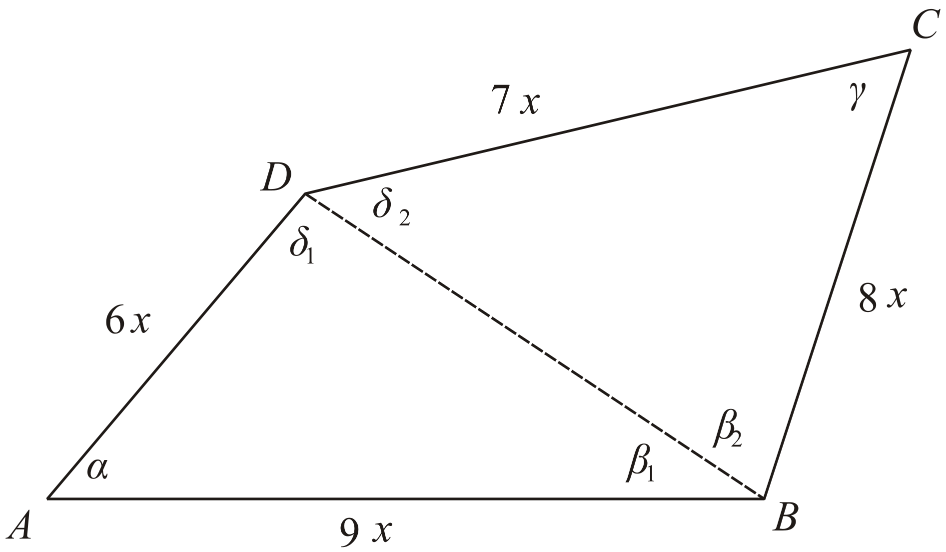
$$\sin\gamma = \frac{m_3}{a}, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_3}{\sin\gamma} = \frac{32}{\sin 46,33^0} \approx 44,24.$$

A háromszög területe:

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{33,12 \cdot 28 \cdot \sin 74,66}{2} \approx 447,16.$$

28. Az $ABCD$ négyszögben $AB:BC:CD:DA = 9:8:7:6$, a négyszög területe $t = 225$ terültegység és $\alpha = BAD\measuredangle = 72^0 36' 18''$. Mekkorák a négyszög oldalai és szögei?

Megoldás:



$$\left.\begin{aligned} BD^2 &= (9x)^2 + (6x)^2 - 2\cdot 9x\cdot 6x\,cos\,\alpha \\ BD^2 &= (8x)^2 + (77x)^2 - 2\cdot 8x\cdot 7x\,cos\,\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow 81x^2 + 36x^2 - 100x^2\,cos\,\alpha = 64x^2 + 49x^2 - 112x^2\,cos\,\gamma$$

$$112\,cos\,\gamma = -4 + 108\,cos\,\alpha$$

$$cos\,\gamma = \frac{108\,cos\,\alpha - 4}{112} = \frac{27\,cos\,\alpha - 1}{28} \approx 0,2526 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 75,37^0.$$

$$BD^2 = 81x^2 + 36x^2 - 108x^2 \cdot 0,298957 = 84,7125x^2$$

$$BD = 9,2x$$

$$\frac{sin\,\delta_1}{sin\,\alpha} = \frac{9x}{9,2x} = \frac{9}{9,2} \quad \Rightarrow \quad sin\,\delta_1 = \frac{9\,sin\,\alpha}{9,2} \approx 0,9335 \qquad \delta_1 = 68,99^0.$$

$$\beta_1 = 180^0 - (\alpha + \delta_1) = 38,40^0.$$

$$\frac{sin\,\delta_2}{sin\,\gamma} = \frac{8x}{9,2x} = \frac{8}{9,2} \quad \Rightarrow \quad sin\,\delta_2 = \frac{8\,sin\,\gamma}{9,2} \approx 0,8298$$

$$\delta_2 = 56,08^0 \qquad \beta_2 = 180^0 - (\gamma + \delta_2) = 48,55^0.$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 86,95^0, \qquad \delta = \delta_1 + \delta_2 = 125,07^0.$$

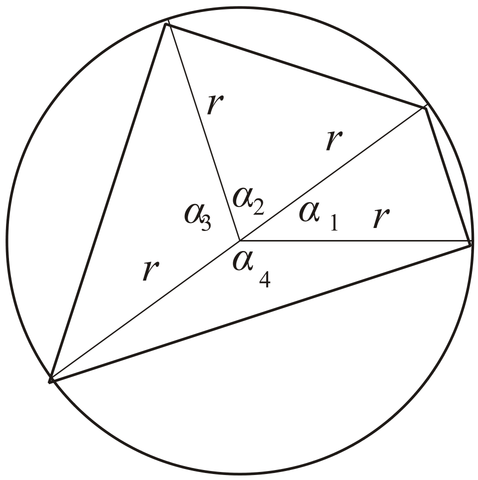
$$t = \frac{6x\cdot 9x\,sin\,\alpha}{2} + \frac{7x\cdot 8x\,sin\,\gamma}{2} = x^2\left(27\,sin\,\alpha + 28\,sin\,\gamma\right)$$

$$x^2 = \frac{t}{27\,sin\,\alpha + 28\,sin\,\gamma} = \frac{225}{25,7652 + 27,0922} \approx 4,256 \quad \Rightarrow \quad x = 2,063.$$

Az oldalak: $AB = 18,57$; $BC = 16,50$; $CD = 14,44$; $DA = 12,38$.

29. A kör kerületét négy pont 1 : 2 : 3 : 4 arányban oszt. Mekkora az osztópontok által meghatározott négyszög területe, ha a kör átmérője 10 egység.

Megoldás:



Az egyes ívekhez tartozó középponti szögek (az ábra jelöléseit követve):

$\alpha_1 = 36^0,\ \alpha_2 = 72^0,\ \alpha_3 = 108^0,\ \alpha_4 = 144^0$, a kör sugara: $r = 5$ egység.

A négyszög területe:

$$T = \frac{25}{2}\left(\sin 36^0 + \sin 72^0 + \sin 108^0 + \sin 144^0\right) = 25\left(\sin 36^0 + \sin 72^0\right) \text{, mert}$$

$$\sin 108^0 = \sin 72^0, \quad \sin 144^0 = \sin 36^0.$$

A további átalakításokhoz felhasználjuk a következő azonosságokat, illetve ismereteket:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \cos 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Így $T = 25\cdot 2\cdot \sin 54^0 \cos 18^0 = 50 \sin 54^0 \cos 18^0$.

$$\sin 54^0 = \sin\left(3\cdot 18^0\right) = 3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0$$

$$\sin^3 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\left(6-2\sqrt{5}\right)}{16} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{8} =$$

$$= \frac{3\sqrt{5}-3-5+\sqrt{5}}{32} = \frac{4\sqrt{5}-8}{32} = \frac{\sqrt{5}-2}{4},$$

$$\sin 54^0 = \frac{3\sqrt{5}-3}{4} - \frac{\sqrt{5}-2}{2} = \frac{3\sqrt{5}-3-2\sqrt{5}+4}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Az így kiszámolt értékekkel a négyszög területe:

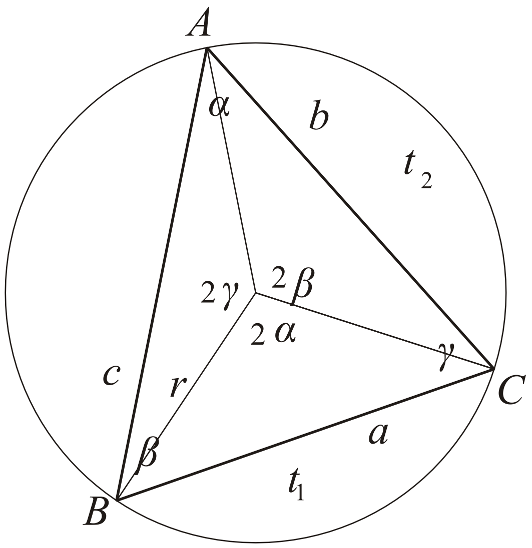
$$T = 50 \sin 54^0 \cos 18^0 = 50 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 50 \cdot \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16} =$$

$$= 50 \cdot \frac{\sqrt{60+12\sqrt{5}+20\sqrt{5}+20}}{16} = \frac{25 \cdot \sqrt{80+32\sqrt{5}}}{8} = \frac{25 \cdot \sqrt{16\left(5+2\sqrt{5}\right)}}{8} = \frac{25 \cdot \sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}.$$

$T = \dfrac{25 \cdot \sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \approx 38,47$ terület egység.

30. Egy háromszög oldalai 13, 14 és 15 egység. Tekintsük a háromszög köré írható kört. Számítsuk ki a háromszög oldalai által levágott körszeletek területét.

Megoldás:



A körszelet területét a $t = \frac{r^2}{2}\left(2\widehat{\alpha} - \sin 2\alpha\right)$ képlettel fogjuk számolni, ahol r a köré írt kör sugara, α a körszelet húrjához tartozó kerületi szög $2\widehat{\alpha}$ pedig a húrhoz tartozó középponti szög radiánban. {A képletet egyébként könnyen megkapjuk, ha a körcikkből kivonjuk a két sugár és a körszelet húrja által meghatározott háromszög területét.} A megoldáshoz többféle módon eljuthatunk, a lényeg, hogy a sugarat és a szögeket valamilyen módszerrel számoljuk ki.

Az ABC háromszög területe: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = 84$.

A köré írt kör sugara a $T=\dfrac{abc}{4r}$ képletből számolható: $r=\dfrac{abc}{4T}=\dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=8{,}125$.

A szögeket a „húrképlettel” számoljuk, pl. $a=2r\,sin\,\alpha$ képlettel:

$$sin\,\alpha=\frac{13}{2\cdot 8{,}125}=0{,}8 \quad\Rightarrow\quad \alpha=53{,}13^0 \quad\Rightarrow\quad 2\widehat{\alpha}=1{,}8546 \text{ rad}$$

$$sin\,\beta=\frac{14}{2\cdot 8{,}125}=0{,}8615 \quad\Rightarrow\quad \beta=59{,}49^0 \quad\Rightarrow\quad 2\widehat{\beta}=2{,}076 \text{ rad}$$

$$\gamma=180^0-(\alpha+\beta)=67{,}38^0 \quad\Rightarrow\quad 2\widehat{\gamma}=2{,}3526.$$

Az egyes körszeletek területei:

$$t_1=\frac{8{,}125^2}{2}(1{,}8546-0{,}96)\approx 29{,}5 \text{ terület egység,}$$

$$t_2=\frac{8{,}125^2}{2}(2{,}076-0{,}8748)\approx 39{,}6 \text{ területegység,}$$

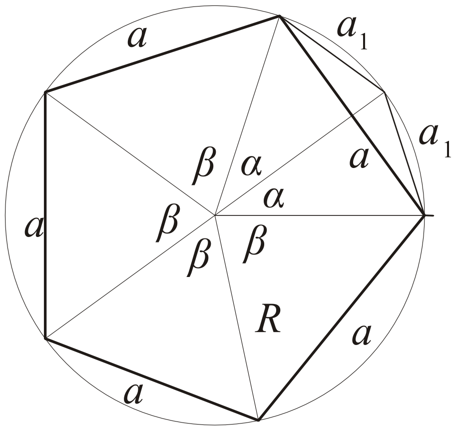
$$t_3=\frac{8{,}125^2}{2}(2{,}3526-0{,}71)\approx 54{,}22 \text{ területegység.}$$

31. Egy R sugarú körbe írt szabályos ötszög oldala a, ugyanezen körbe írt szabályos tízszög oldala a_1. A szabályos sokszögek beírt körének sugara r, illetve r_1.

Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2-a_1^2=R^2, \quad \text{és} \quad \frac{a}{r}+\frac{a_1}{r_1}=\frac{2R}{r_1}.$$

Megoldás:



Nyilvánvaló, hogy $\beta=72^0,\quad \alpha=36^0$, így $a=2R\,sin\,36^0,\quad a_1=2R\,sin\,18^0$.

$$a^2-a_1^2=4R^2\left(sin^2 36^0-sin^2 18^0\right)=4R^2\left(sin\,36^0+sin\,18^0\right)\left(sin\,36^0-sin\,18^0\right).$$

Felhasználva, hogy $\quad sin\,36^0 + sin\,18^0 = 2\,sin\dfrac{36^0+18^0}{2}cos\dfrac{36^0-18^0}{2} = 2\,sin\,27^0\,cos\,9^0$,

$$sin\,36^0 - sin\,18^0 = 2\,sin\frac{36^0-18^0}{2}cos\frac{36^0+18^0}{2} = 2\,sin\,9^0\,cos\,27^0.$$

Így

$$a^2 - a_1^2 = 4R^2\,2\,sin\,27^0\,cos\,9^0\,2\,cos\,27^0\,sin\,9^0 = 4R^2\,sin\left(2\cdot 27^0\right)sin\left(2\cdot 9^0\right) = 4R^2\,sin\,54^0\,sin18^0.$$

$$sin\,54^0 = sin\left(3\cdot 18^0\right) = 3\,sin18^0 - 4\,sin^3 18^0,$$

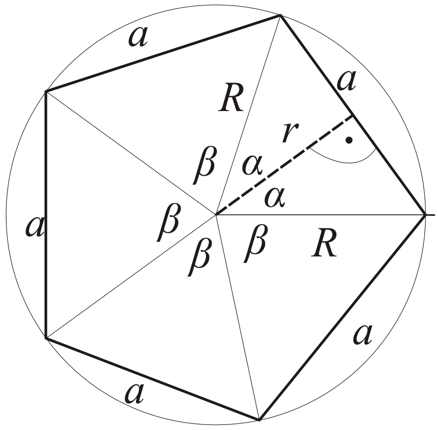
$$sin\,54^0\,sin18^0 = 3\,sin^2 18^0 - 4\,sin^4 18^0.$$

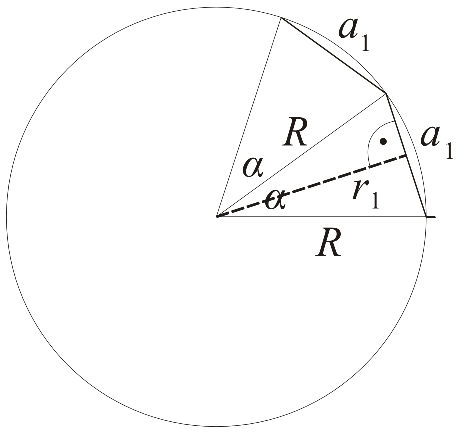
Ismeretes, hogy $\quad sin18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, így

$$sin^2 18^0 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}, \quad sin^4 18^0 = \frac{9-6\sqrt{5}+5}{64} = \frac{14-6\sqrt{5}}{64} = \frac{7-3\sqrt{5}}{32}.$$

$$sin\,54^0\,sin18^0 = 3\,sin^2 18^0 - 4\,sin^4 18^0 = 3\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{8} - 4\cdot\frac{7-3\sqrt{5}}{32} = \frac{9-3\sqrt{5}-7+3\sqrt{5}}{8} = \frac{1}{4}.$$

Így $a^2 - a_1^2 = 4R^2\,sin\,54^0\,sin18^0 = 4R^2\cdot\dfrac{1}{4} = R^2$.





$$\frac{r}{R} = cos\,36^0 \quad\Rightarrow\quad r = R\,cos\,36^0, \quad a = 2R\,sin\,36^0,$$

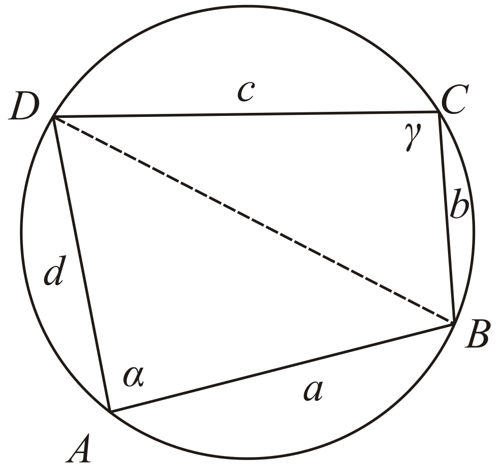
$$\frac{r_1}{R} = cos18^0 \quad\Rightarrow\quad r_1 = R\,cos18^0, \quad a_1 = 2R\,sin18^0,$$

$$\frac{a}{r} + \frac{a_1}{r_1} = \frac{2\,sin\,36^0}{cos\,36^0} + \frac{2\,sin18^0}{cos18^0} = 2\cdot\frac{sin\,36^0\,cos18^0 + cos\,36^0\,sin18^0}{cos\,36^0\,cos18^0} =$$

$$= 2\cdot\frac{sin\,54^0}{cos\,36^0\,cos18^0} = \frac{2}{cos18^0} = \frac{2R}{R\,cos18^0} = \frac{2R}{r_1}.$$

32. Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrnégyszög egyben érintőnégyszög is, akkor a területe az oldalak szorzatának négyzetgyökével egyenlő.

Megoldás:



Ha az *ABCD* négyszög érintőnégyszög is, akkor

$$a+cb+d \quad \Rightarrow \quad a-d=b-c\,.$$

Mivel $\alpha+\gamma=180^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma=180^0-\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma=\sin\alpha$.

a négyszög területe:

$$T=\frac{ad\sin\alpha}{2}+\frac{bd\sin\gamma}{2}=\frac{bc+ad}{2}\cdot\sin\alpha\,.$$

$$\left.\begin{aligned} BD^2&=a^2+d^2-2ad\cos\alpha \\ BD^2&=b^2+c^2+2bc\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow b^2+c^2+2bc\cos\alpha=a^2+d^2-2ad\cos\alpha$$

$$2(bc+ad)\cos\alpha=a^2+d^2-\left(b^2+c^2\right)$$

$$\cos\alpha=\frac{a^2+d^2-\left(b^2+c^2\right)}{2(bc+ad)}$$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ alapján

$$\sin^2\alpha=1-\left[\frac{a^2+d^2-\left(b^2+c^2\right)}{2(bc+ad)}\right]^2=\left(1-\frac{a^2+d^2-\left(b^2+c^2\right)}{2(bc+ad)}\right)\left(1+\frac{a^2+d^2-\left(b^2+c^2\right)}{2(bc+ad)}\right)=$$

$$=\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(bc+ad)}\cdot\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(bc+ad)}$$

$a-d=b-c$ feltétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$sin^2\,\alpha=\frac{2b\cdot 2c\cdot 2a\cdot 2d}{4\left(bc+ad\right)^2}=\frac{4abcd}{\left(bc+ad\right)^2},$$

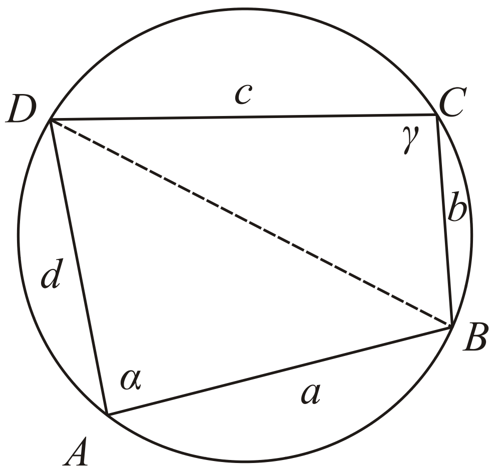
$$sin\,\alpha=\frac{2\sqrt{abcd}}{bc+ad}.$$

Ezek után a négyszög területe:

$$T=\frac{bc+ad}{2}\cdot sin\,\alpha=\frac{bc+ad}{2}\cdot\frac{2\sqrt{abcd}}{bc+ad}=\sqrt{abcd}.$$

33. A húrnégyszög átlóit számoljuk ki az oldalak segítségével.

Megoldás:



$\gamma=\pi-\alpha\quad\Rightarrow\quad cos\,\gamma=-cos\,\alpha$, mait felhasználunk a koszinusz - tétel felírásakor:

$$\left.\begin{aligned}BD^2&=a^2+d^2-2ad\,cos\,\alpha\\ BD^2&=b^2+c^2+2bc\,cos\,\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ b^2+c^2+2bc\,cos\,\alpha=a^2+d^2-2ad\,cos\,\alpha$$

$$2\left(bc+ad\right)cos\,\alpha=a^2+d^2-\left(b^2+c^2\right)$$

$$cos\,\alpha=\frac{a^2+d^2-\left(b^2+c^2\right)}{2\left(bc+ad\right)},$$

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cdot\frac{a^2+d^2-\left(b^2+c^2\right)}{2\left(bc+ad\right)}=\frac{\left(a^2+d^2\right)bc+\left(a^2+d^2\right)ad-\left(a^2+d^2\right)ad+ad\left(b^2+c^2\right)}{bc+ad},$$

$$BD=\sqrt{\frac{\left(a^2+d^2\right)bc+\left(b^2+c^2\right)ad}{bc+ad}}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy: $AC = \sqrt{\dfrac{(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab}{ab+cd}}$.

34. A háromszög beírható körének sugara r, az oldalakat kívülről érintő (úgy nevezett) hozzáírt körök sugarai r_a, r_b, r_c és a köré írt kör sugara *R*.

Bizonyítsuk be, hogy

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

Megoldás:

Ismeretes, hogy

$$r_a = \frac{T}{s-a};\; r_b = \frac{T}{s-b};\; r_c = \frac{T}{s-c};\; r = \frac{T}{s}\;,\; \text{illetve}\; R = \frac{abc}{4T}.$$

Így

$$r_a - r + r_b + r_c = \frac{T}{s-a} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s-b} + \frac{T}{s-c} = T\left[\frac{s-s+a}{s(s-a)} + \frac{s-c+s-b}{(s-b)(s-c)}\right] =$$

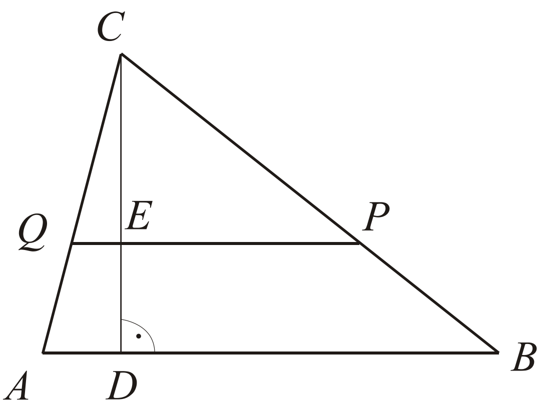
$$= T\left[\frac{a}{s(s-a)} + \frac{2s-(b+c)}{(s-b)(s-c)}\right] = a\cdot T\cdot\frac{(s-b)(s-c)+s(s-a)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= a\cdot\frac{s^2-bs-cs+bs+s^2-as}{T} = a\cdot\frac{2s^2-\left(\overbrace{b+c+a}^{2s}\right)s+bs}{T} = \frac{abc}{T} = 4R.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

35. Az ABC háromszögben $AB = 12$ egység, a hozzá tartozó magasság 8 egység. Az AB – vel párhuzamos PQ szakasszal a háromszöget CPQ háromszögre és $ABPQ$ trapézra bontottuk, ezek területe t_1 és t_2 melyekre $t_1 : t_2 = 7:9$. Mekkora a PQ és milyen távol van AB – től?

Megoldás:



Nyilvánvaló, hogy $ABC_\triangle \sim QPC_\triangle$, ezért a területek aránya megegyezik a hasonlósági arány négyzetével:

$$\lambda^2 = \left(\frac{PQ}{AB}\right)^2 = \frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{\frac{t_1}{t_2}}{\frac{t_1}{t_2} + 1} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{7}{9} + 1} = \frac{7}{16},$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{PQ}{AB} \quad \Rightarrow \quad PQ = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot AB = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 12 = 3\sqrt{7} = 7{,}94, \qquad ,$$

$$CE = \lambda \cdot CD = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 8 = 2\sqrt{7}, \quad ED = CD - CE = 8 - 2\sqrt{7} \approx 2{,}7$$